

튀는 구슬들 - 상전이와 불안정성에 대한 모형 (10 점)

문제 풀이를 시작하기 전에 먼저 다른 봉투에 넣어진 일반적인 지시사항을 꼭 읽으시오.

도입부

상전이 현상은 일상 생활에서 잘 알려져있다. 예를 들어 물은 고체, 액체, 기체와 같이 서로 다른 상태를 가진다. 이렇게 서로 다른 상태는 상전이에 의해 구분되며, 물질내 분자들의 집단적 성질이 크게 변하게 된다. 그러한 상전이에서는 항상 상전이 온도가 연관되는 바, 물의 경우 어는 온도 (빙점) 과 끓는 온도 (비등점) 가 이에 해당한다.

그러나, 상전이는 좀더 광범위하게 자연에서 관측되며, 자석이나 초전도체와 같은 다른 시스템에서도 일어나는데, 전이 온도 아래에서 거시적인 상태가 상자성 상태에서 강자성 상태로 변하며, 보통의 전도체가 초전도체로 변한다.

이러한 상전이는 소위 정렬 파라미터 (order parameter) 를 도입하면 모두 공통된 틀 안에서 설명할 수 있다. 예를 들어 자석에서는, 거시적인 자기화를 만들어내는 각 원자들의 자기 쌍극자의 벡터합을 정렬 파라미터로 선택할 수 있다.

< 그림 1 > 에 자석에 대해 개략적으로 나타내었듯이, 소위 연속 상전이에서는 임계온도 T_{crit} 보다 높을 때 정렬 파라미터는 항상 영이고, 임계온도 T_{crit} 아래에서는 연속적으로 증가한다. 연속 상전이의 전이 온도를 임계 온도라고 부른다. 이 그림은 또한 자석의 경우 원자 각각의 자기 모멘트가 미시적으로 질서 정연한 것과 무질서한 것을 개략적으로 나타내 준다. 여기서 각 원자의 자기쌍극자들은 임계온도 이하의 강자성 상태에서는 정렬하여 거시적인 자기화를 만드는 반면에, 임계온도 이상의 상자성 상태에서는 방향이 제각각이어서 거시적인 자기화는 0 이 된다.

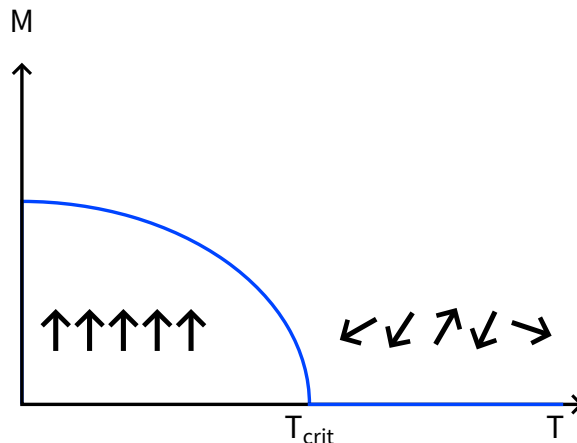


그림 1: 상전이에서 정렬 파라미터 M 의 온도 의존성을 개략적으로 표현한 그림. 임계온도 T_{crit} 아래에서는 정렬 파라미터가 증가하여 절대값이 영보다 커지는 반면, T_{crit} 이상에서는 항상 0 이 된다.

연속 상전이에서는 일반적으로 정렬 파라미터가 상전이 온도와 아주 인접한 온도 구간에서 거듭제곱꼴 (power-law) 를 따른다. 예를 들어, 자성체에서는 자기화 M 이 임계온도 근방에서 아래와 같이 주어진다.

$$M \begin{cases} \sim (T_{crit} - T)^b, & T < T_{crit} \\ = 0, & T > T_{crit} \end{cases} \quad (1)$$

여기서 T 는 온도이다. 더욱 놀라운 것은 이러한 거동이 보편적으로 널리 관측된다는 것이다 : 즉, 거듭제곱꼴 (power-law) 의 지수 b 는 다양한 여러 종류의 상전이에서 종종 같은 값을 가진다.

할 일

여기서는 연속 상전이의 몇 가지 특징을 조사할 수 있는 간단한 예를 다룬다. 예를 들어, 어떻게 불안정성이 입자들의 집단 행동에 이르고 마침내 상전이에 이르는지, 또한 거시적인 변화가 입자들의 여기 (excited) 상태에 어떻게 의존하는지 등을 탐구해 볼 수 있다.

상전이에서 이러한 여기상태는 보통 온도에 의해 발생한다. 우리의 예에서는, 여기상태가 스피커에 의해 가속된 입자들의 운동에너지이다. 여기서 우리가 다루는 상전이에 대응하는 거시적인 변화는 충분한 숫자의 구슬들을 원통 바닥의 작은 공간에 양쪽으로 갈라놓는 것이다.

입자들을 모두 원통의 한쪽으로 몰아놓은 상태에서 스피커 진폭을 증가시켜 충분히 튀게 하면, 마침내 입자들은 양쪽에 균일하게 분포하게 된다. 이것이 임계 온도 이상으로 가열하는 것에 해당된다.

이 문제의 목적은 여기서 다루는 상전이의 임계 지수를 결정하는 것이다.

기구 목록

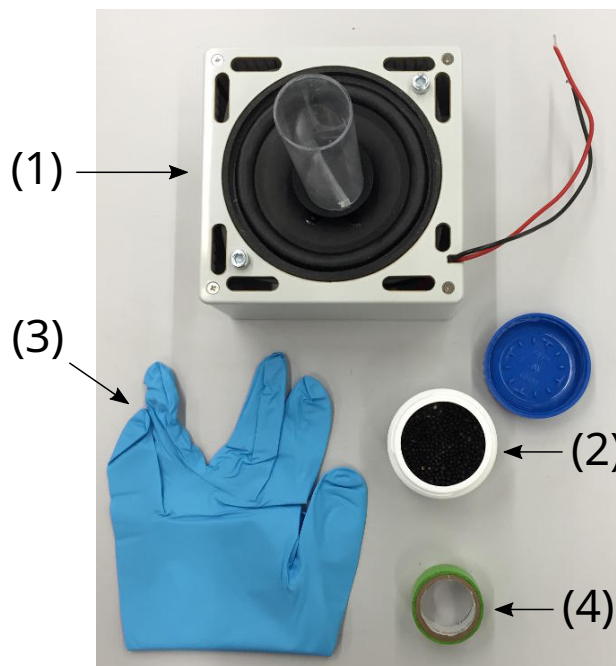


그림 2: 이 실험에 필요한 추가 장비들

1. 플라스틱 원통이 스피커 진동막 위에 설치된 스피커 조립품 (어셈블리)
2. (플라스틱 용기 안에 있는) 약 100 개의 양귀비 씨앗들
3. 장갑
4. 끈끈한 테이프

중요한 주의 사항

- 스피커 위에 부착된 플라스틱 원통에 수평으로 힘을 과도하게 가하지 마시오. 스피커의 막 (membrane) 이 찢어 지거나 플라스틱 원통이 손상되는 경우 교체하여 주지 않음을 유의하십시오.
- 배터리의 필요없는 소모를 피하기 위하여, 사용하지 않을 때에는 스피커 조립품의 전원을 꺼 주십시오.
- 이 실험에서 4 Hz 의 톱니모양 신호는 신호 발생기의 측면에 위치한 스피커 단자로 출력된다.
- "speaker amplitude (4)" 라고 표시된 오른쪽의 전위차계 (전위조절 다이얼) 를 이용하여 톱니 모양 신호의 진폭 을 조절할 수 있다. 신호의 진폭에 비례하는 DC 전압이 "speaker amplitude monitor socket (6)" 에 출력된다. 여기서 괄호안 숫자의 기구들은 일반적인 지시사항에 보인 사진 (그림 2) 에 표시되어 있다.
- 스피커 막은 약하고 민감하다. 수직 또는 수평으로 불필요한 압력을 가하지 않도록 주의하십시오.

파트 A. 임계 여기 진폭 (critical excitation amplitude) (3.3 점)

실제로 이 문제의 과제를 하기 전에, 스피커 연결선을 신호 발생기의 측면에 있는 단자에 연결하십시오 (극성이 맞게 되도록 두 연결선을 확인하십시오) 양귀비 씨앗들 (예를 들어 50 개) 을 스피커에 부착된 원통에 넣고, 씨앗들이 원통 안에서 튀어 나오지 않도록 장갑에서 일부분을 잘라 원통의 윗부분을 막으십시오. 똑딱 (toggle) 스위치를 사용하여 여기상태를 발생시키고, 드라이버로 speaker amplitude (4) 라고 표시된 오른쪽의 전위차계 (전위조절 다이얼) 를 조절하여 진폭을 조절하십시오. 여러 개의 진폭을 한동안 가해 테스트하여 구슬들이 갈라지는 현상을 관찰하십시오.

첫번째 과제는 이 상전이를 유발시키는 여기 진폭의 임계값을 결정하는 것이다. 이를 위하여, 양쪽에 있는 구슬의 개수 N_1 과 N_2 를 표시 진폭 A_D 의 함수로 구하여야 한다. (항상 $N_1 \leq N_2$ 가 되게 반쪽 각 부분의 라벨을 정하십시오) 여기서 표시 진폭이란 스피커 진폭 모니터 소켓 (6) 에서 측정된 전압을 말한다. 이 전압은 스피커를 구동하는 톱니모양 파형의 진폭에 비례한다. 하나의 전압당 적어도 5 번 이상의 측정을 하십시오.

힌트:

- 입자들의 운동을 발생시키기 위하여, 스피커 진폭 전압이 0.7 V 를 넘는 진폭만을 조사하십시오. 처음에는 구슬들의 수를 세지 않으면서 천천히 전압을 변화시켜 시스템의 거동 변화를 관찰하십시오. 어떤 구슬들은 정전기 때문에 바닥에 붙어있을 수 있습니다. 이러한 구슬들은 세지 마십시오.

A.1 표 A.1 에 여러 값의 진폭 A_D 에 대하여 용기의 각 쪽에 담긴 입자의 수 N_1 과 N_2 를 기록 하십시오. 1.2pt

A.2 N_1 과 N_2 의 측정값들의 표준편차를 계산하여 결과들을 표 A.1 에 일람표를 만드십시오. 그 래프 A.2 에 표시 진폭 A_D 의 함수로 N_1 과 N_2 를 불확도와 함께 표시하십시오. 1.1pt

A.3 얻은 그래프에 기초하여, 정상 (평형) 상태에 도달할 때까지 기다린 후 $N_1 = N_2$ 이 되는 임 계 표시 진폭 $A_{D,crit}$ 을 구하십시오. 1pt

파트 B. 눈금 교정 (3.2 점)

표시 진폭 A_D 는 스피커에 가하는 전압에 대응된다. 그러나, 물리적으로 관심 있는 양은 스피커 진동의 최대 변위 A 이다. 왜냐하면, 이것이 구슬들이 얼마나 강하게 여기되어 있는지와 연관되기 때문이다. 따라서, 표시진폭의 눈금을 보정 (calibrate) 할 필요가 있다. 이를 위하여, 필요하다면 제공된 기구와 도구 중 어느 것이든 적당한 것을 사용할 수도 있다.

B.1 여기진폭, 즉 한주기 진동 동안 스피커의 최대 이동거리 A (mm 단위) 를 측정하기위하여 사용한 실험 셋업을 사용도구와 함께 스케치하십시오. 0.5pt

B.2 충분한 개수의 작거나 큰 진폭 A [mm 단위] 에 대해 측정을 수행하십시오. 즉, 표 B.2 에 표시진폭 A_D 의 함수로 진폭 A 를 기록하십시오. 그리고 측정의 불확도를 표시하십시오. 0.8pt

B.3 그래프 B.3 에 측정된 자료를 불확도를 포함하여 그리시오. 1.0pt

B.4 눈금 교정 함수 $A(A_D)$ 를 결정하는 데에 적절한 피팅 수식을 사용하여, 실험결과로 얻어진 선 (curve) 의 파라미터들을 결정하십시오. 0.8pt

B.5 씨앗들의 임계 여기 진폭 A_{crit} 을 결정하십시오. 0.1pt

파트 C. 임계 지수 (3.5 점)

우리 시스템에서, 온도는 외부 자극의 입력 운동에너지에 대응된다. 이 에너지는 스피커의 속력 제곱에 비례한다. 즉, $v^2 = A^2 f^2$ 여기서 f 는 진동의 주파수이다. 이제 이 의존성을 테스트하고, 정렬 파라미터의 거듭제곱꼴 (power-law) 의 지수 b 를 결정할 것이다. (식 1 을 보시오).

C.1 불균형 인자 $\left| \frac{N_1 - N_2}{N_1 + N_2} \right|$ 은 임계진폭 이상에서는 0 이고, 매우 낮은 자극에서는 1 이라는 점에서 이 시스템의 정렬 파라미터로 적당한 후보이다. 진폭 A 의 함수로 이 정렬 파라미터를 측정하시오. **표 C.1** 에 결과를 기록하시오. 1.1pt

C.2 두 축이 모두 로그 눈금인 (로그-로그 그래프) **그래프 C.2** 에 불균형 인자 $\left| \frac{N_1 - N_2}{N_1 + N_2} \right|$ 를 $|A^2 - A_{\text{crit}}^2|$ 의 함수로 표시하시오. 계산을 위하여 **표 C.1** 을 사용할 수 있다. 그래프의 점들은 선형관계를 따르지 않는 것으로 보일 수 있지만, 그럼에도 불구하고 임계점 근처에서는 임계지수 공식에 부합되는 선형 회귀법을 사용하여야 한다. 1pt

C.3 지수 b 를 구하고, 오차를 추정하시오. 1.4pt