

跳動的珠子：一個相變與不穩定性的模型 (10 分)

在你開始作答本題前，請務必先讀過裝在另一個信封內的實驗考試通用指引。

簡介

相變在日常生活中隨處可見，例如水有固態、液態及氣態等三個相，而這些不同的相之間則由相變隔開。相變發生時，物質中之分子的整體特性改變。這類的相變總是有其對應的相變溫度，也就是相變發生時的溫度，例如上例中的水之凝固點及沸點。

相變發生的時機很廣泛，例如在磁鐵或超導體的系統中，當低於相變溫度時系統中的巨觀狀態會改變，會讓磁鐵由順磁態轉變成鐵磁態、讓超導體由一般態轉變成超導態。

利用所謂「序參數」的概念，所有的這類相變都可以透過一個共同的理論架構來闡述。例如在磁學中，序參數與原子磁偶極的排列有關，可用來探討巨觀的磁化強度。

在所謂的連續性相變系統中，當高於相變溫度時，系統的序參數保持為零，而當低於相變溫度時，系統的序參數則會隨溫度的降低而連續性地持續增大，就如同下方圖 1 中的磁鐵系統示意圖。在連續性相變系統中，其相變溫度即稱為臨界溫度。圖 1 中也示意性地呈現出磁鐵中的微觀「序」，也就是在鐵磁態時，各磁偶極因同向排列以致造成在巨觀上的磁化現象，反之在順磁態時，各磁偶極則因凌亂排列以致於在巨觀上的磁化強度為零。

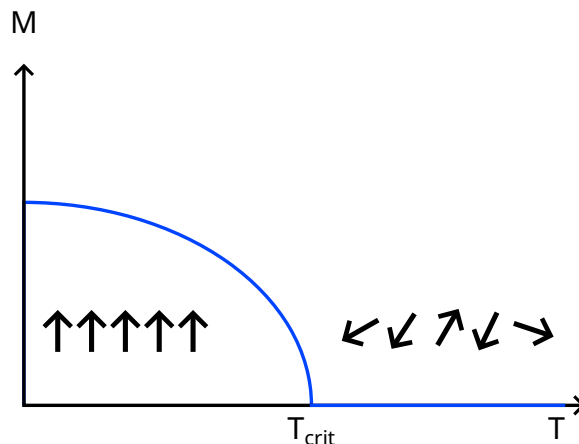


圖 1：相變過程中「序參數」 M 隨溫度變化的示意圖。當低於臨界溫度 T_{crit} 時，系統的序參數會隨溫度的降低而變大，反之當高於臨界溫度 T_{crit} 時，系統的序參數等於零。

在連續性相變系統中，序參數的值在相變時隨溫度的變化通常會遵守「冪次律」，例如在磁學中，當低於臨界溫度 T_{crit} 時，系統的磁化強度 M 與溫度的關係為

$$M \begin{cases} \sim (T_{\text{crit}} - T)^b, & T < T_{\text{crit}} \\ = 0, & T > T_{\text{crit}} \end{cases} \quad (1)$$

上式中的 T 為溫度。更令人驚訝的是，這樣的性質具有一致的普遍性：此處所指「冪次律」中的指數，其數值在許多不同的相變中竟然都相同。

實驗概述

我們將探索一個簡單的例子，藉以探究連續性相變的一些特性，例如系統的不穩定性如何造成粒子集體行為的改變、進而導致相變的出現，以及粒子的激發程度如何造成系統的巨觀變化。

在常見的相變中，上述的激發程度經常是由溫度來掌控。而在我們的例子中，激發的程度則是由喇叭所驅動之粒子的動能來決定。在這個例子裡，有一圓筒以小牆分隔為兩半，而該系統中對應於我們所探究之相變的巨觀變化，即為小珠子在圓筒中兩半間的分布情況。

當喇叭的振幅超過某特定值時，你會發現粒子將平均分佈在圓筒的兩半，此情況即對應到相變中超過臨界溫度時的情況。

本實驗的最終目標，就是要求得這個相變模型中之冪次律的指數。

實驗器材

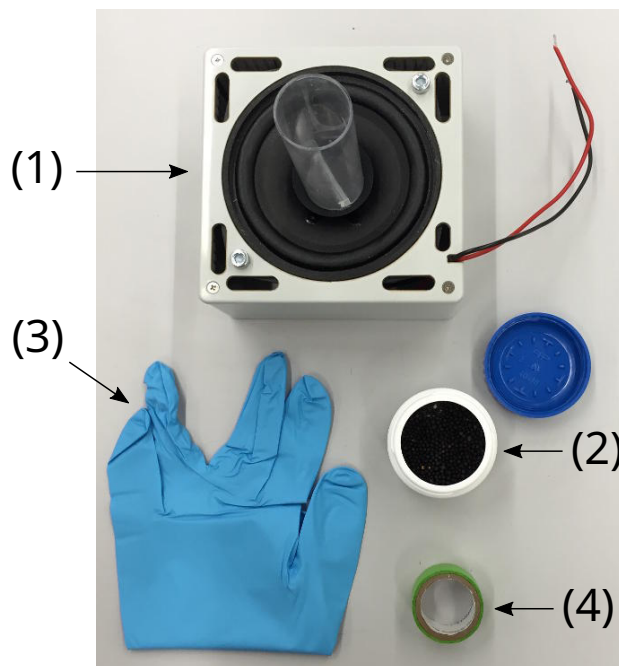


圖 2：此實驗所需的額外器材。

1. 附有塑膠圓筒的喇叭組
2. 大約 100 顆的罌粟籽（置於塑膠容器中）
3. 手套
4. 膠帶

重要注意事項

- 勿對喇叭上的塑膠圓筒施以過強的側向力。若將喇叭振動膜弄破或將塑膠圓筒弄破，將不會給予備品，請小心使用。

- 喇叭組不使用時，請關閉電源，以節省電力。
- 在這個實驗中，訊號產生器對喇叭所輸出的訊號為頻率 4 Hz 的鋸齒波。
- 鋸齒波的振幅可由標示有「speaker amplitude (4)」的電位計來調整。在「speaker amplitude (6)」的監控插孔會輸出一個相對於接地插孔 (7) (GND) 的直流電壓，該電壓正比於輸出訊號的振幅。上述括號中的數字對應到「綜合說明」中圖 2 的照片。
- 喇叭上的振動膜非常精密，請勿在鉛直或水平方向上對其施以沒有必要的壓力。

A 部分. 臨界激發強度 (3.3 分)

在你開始進行本題的實驗前，先將喇叭以導線連接到訊號產生器的接頭（記得確認正負極沒有接錯）。將一些罌粟籽（例如 50 顆）放置於喇叭上的圓筒內，並且將手套裁剪一段下來以封住圓筒上方的開口，好讓罌粟籽能被封在圓筒內。將激發器開關打開，並且用螺絲起子旋轉標有「speaker amplitude」的電位計旋鈕 (4) 以調整強度。嘗試使用不同的強度，以觀察種子數量在圓筒兩半間的分佈。

第一部分主要在測出相變發生時的「臨界激發強度」。在過程中，你必須清點並記錄圓筒中兩半區內的種子數 N_1 及 N_2 （記錄時選定 $N_1 \leq N_2$ ），並將這兩個數記錄為所示強度 A_D 的函數，此強度即為由「speaker amplitude (6)」插孔所測量到的伏特數。此伏特數和驅動喇叭的鋸齒波振幅成正比。針對每個伏特數，進行至少 5 次的種子數量測。

提示:

- 為了讓你所研究的粒子始終保持在運動中，只需探索記錄「speaker amplitude」伏特數大於 0.7 V 的情況。首次進行實驗時，試著先緩慢地改變伏特數，然後觀察系統的行為，而先不要清點種子數。你可能會發現，有些小珠子會因為靜電而一直吸附固定在底面上，不要將這些吸附住的小珠子納入實驗的計數中。

A.1 在表格 A.1 中，針對不同的所示強度 A_D ，分別記錄下圓筒兩半區的種子數 N_1 及 N_2 。 1.2pt

A.2 分別計算 N_1 及 N_2 的標準差，並將之記錄於表格 A.1 中。在作圖紙 A.2 中，將 N_1 及 N_2 畫成所示強度 A_D 的函數，並清楚標出每個資料點的誤差範圍。 1.1pt

A.3 依據以上的作圖結果，找出所示強度的「臨界強度」 $A_{D,crit}$ ，也就是使 $N_1 = N_2$ 的強度，進行此式的判斷時要等待夠久直到圓筒兩半的種子數達穩定態而不再改變。 1pt

B 部分. 校正 (3.2 分)

所示強度 A_D 其實是對應到喇叭所受的電壓。然而在物理上我們所感興趣的物理量，應該是喇叭在上下振動時、由上至下的最大位移 A ，因為它直接對應到種子們被激發的程度。因此，你需要校正儀器的所示強度。你可以利用任何已提供給你的物品及工具來達到這個目的。

B.1 畫出你所設計用量測激發振幅的裝置簡圖，所謂的激發振幅即為喇叭在上下振動時、由上至下的最大位移 A （以 mm 為單位）。 0.5pt

B.2 在表格 B.2 中，將所量測到的振幅 A 記錄為所示強度 A_D 的函數， A 應以 mm 為單位，資料的組數要足夠。指出該量測的單次量測誤差值。 0.8pt

B.3 在作圖紙 B.3 中，畫出以上的量測資料，並標示出各資料點的量測誤差。 1.0pt

B.4 寫出可適當描述 $A(A_D)$ 的函數形式，並算出函數式中的各係數。 0.8pt

B.5 求出罌粟籽的臨界激發振幅 A_{crit} 。 0.1pt

C 部分. 臨界指數 (3.5 分)

我們的系統中，溫度所對應到的是輸入的激發動能。這個能量和喇叭的速率平方成正比，也就是和 $v^2 = A^2 f^2$ 成正比，其中 f 是振動的頻率。現在我們即將測試上述這個關係，並求出主宰序參數之行為的幕次律之指數 b (參見方程式 1)。

C.1 失衡參數 $\left| \frac{N_1 - N_2}{N_1 + N_2} \right|$ 是我們系統中一個良好的序參數，因為當激發振幅超過臨界振幅時它的值等於零，而在低激發強度時它的值等於 1。在**表格 C.1** 中，將這個序參數記錄成振幅 A 的函數。 1.1pt

C.2 在全對數作圖紙 **C.2** 中 (即兩個軸都是對數刻度)，將失衡參數 $\left| \frac{N_1 - N_2}{N_1 + N_2} \right|$ 畫成 $|A_{\text{crit}}^2 - A^2|$ 的函數。你可以使用**表格 C.1** 來進行相關的計算。你在圖中所畫出來的資料點看起來有可能不是呈線性，但你必須假設它們是線性來進行迴歸分析，以符合臨界指數的公式形式。 1pt

C.3 求出指數 b 並且估計其誤差。 1.4pt