

Two Problems in Mechanics-Mexanikaya aid iki məsələ (10 points)

Please read the general instructions in the separate envelope before you start this problem.

Bu məsələni yerinə yetirməyə başlamadan sizə təqdim olunan ayrıca zərfdəki “Ümumi Gösrəşlrlə”tanış olun.

Part A. The Hidden Disk -Hissə A: Gizlədilmiş disk (3.5 points)

We consider a solid wooden cylinder of radius r_1 and thickness h_1 . Somewhere inside the wooden cylinder, the wood has been replaced by a metal disk of radius r_2 and thickness h_2 . The metal disk is placed in such a way that its symmetry axis B is parallel to the symmetry axis S of the wooden cylinder, and is placed at the same distance from the top and bottom face of the wooden cylinder. We denote the distance between S and B by d . The density of wood is ρ_1 , the density of the metal is $\rho_2 > \rho_1$. The total mass of the wooden cylinder and the metal disk inside is M .

Radiusu r_1 , qalınlığı h_1 olan ağac silindirə baxaq. Silindirin daxilində radiusu r_2 , qalınlığı h_2 olan hissədə boşluq açılıb və metal disk gizlədilib. Gizlədilmiş metal diskin B simmetriya oxu, ağac silindirin S simmetriya oxu ilə paraleldir. Metal disk ağac silindirin alt və üst oturacağından bərabər məsafədə yerləşir. Silindirlərin simmetriya oxları arasındakı məsafəni d ilə işarə edək. Ağacın sıxlığı ρ_1 , metalın sıxlığı $\rho_2 > \rho_1$ Metal disk gizlədilmiş silindirin (ikisinin birlikdə) ümumi kütləsi M dir.

In this task, we place the wooden cylinder on the ground so that it can freely roll to the left and right. See Fig. 1 for a side view and a view from the top of the setup.

Bu tapşırıqda metal disk gizlədilmiş ağac silindir yerin səthində qoyulub və istənilən şəkildə sağa və sola diyirləndirilə bilər. Şəkil 1 də silindirin öndən və üstədən görünüşü verilib.

The goal of this task is to determine the size and the position of the metal disk.

Bu məsələdə məqsəd metal diskin yerini və ölçülərini tapmaqdır.

In what follows, when asked to express the result in terms of known quantities, you may always assume that the following are known:

Aşağıdakı kəmiyyətlərin qiymətləri məlumdur və axtardığınız kəmiyyətləri onlarla ifadə etməlisiniz.

$$r_1, h_1, \rho_1, \rho_2, M. \quad (1)$$

The goal is to determine r_2, h_2 and d , through indirect measurements.

Məqsəd r_2, h_2 və d -ni müxtəlif ölçmə və müşahidə nəticələrinə görə təyin etməkdir.

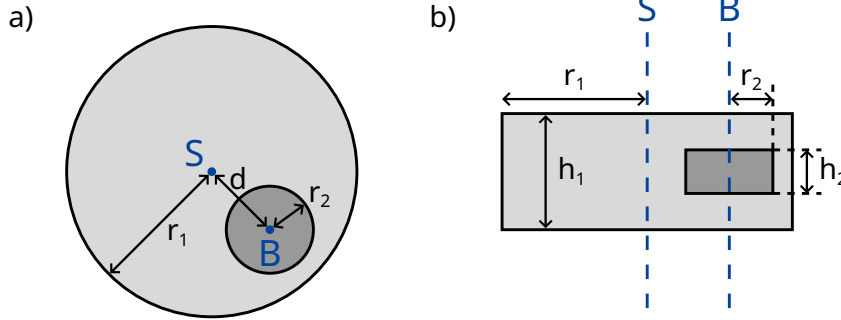


Figure 1: a) side view b) view from above
Şəkil 1: a) En kəsinin görünüşü b) yandan görünüşü.

We denote b as the distance between the centre of mass C of the whole system and the symmetry axis S of the wooden cylinder. In order to determine this distance, we design the following experiment: We place the wooden cylinder on a horizontal base in such a way that it is in a stable equilibrium. Let us now slowly incline the base by an angle θ (see Fig. 2). As a result of the static friction, the wooden cylinder can roll freely without sliding. It will roll down the incline a little bit, but then come to rest in a stable equilibrium after rotating by an angle ϕ which we measure.

Tutaq ki bütün sistemin C -kütlə mərkəzi ilə ağac silindirin S simmetriya oxu arasındakı məsafə b -dir. Bu məsafəni tapmaq üçün belə bir təcrübə etmək olar. Silindir üfüqi müstəvinin üzərinə elə qoyulur ki, o dayanıqlı tarazlıqda olur. Müstəvinə ehməllicə θ bucağı qədər meyl etdiririk (Şəkil-2). Sükunət sürtünməsinə görə silindir sürüşmədən diyirlənə bilər. Ağac silindir bir qədər diyirlənərək yenidən dayanıqlı tarazlıq vəziyyətinə gələcək. Bu zaman silindirin dönmə bucağı ϕ qədər olacaq.

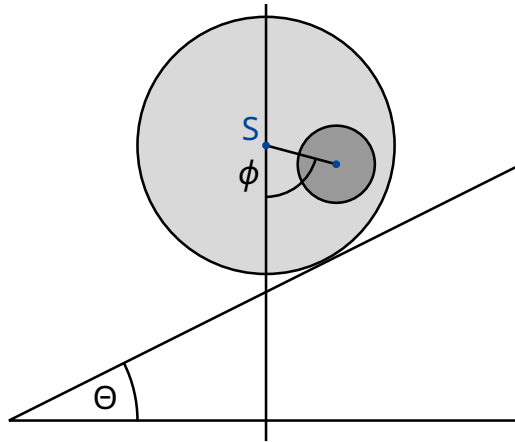


Figure 2: Cylinder on an inclined base.
Şəkil-2: Maili müstəvi üzərində duran silindir.

- A.1** Find an expression for b as a function of the quantities (1), the angle ϕ and the tilting angle Θ of the base. 0.8pt
Yuxarıda verilən məlum (1) kəmiyyətlərindən, ϕ və Θ bucağından istifadə edərək b -nin ifadəsini müəyyənləşdirin.

From now on, we can assume that the value of b is known.

Bundan sonra qəbul edəcəyik ki b kəmiyyəti məlumdur.

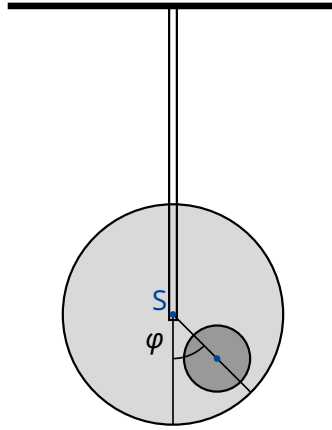


Figure 3: Suspended system
Şəkil3: Asılmış sistem.

Next we want to measure the moment of inertia I_S of the system with respect to the symmetry axis S . To this end, we suspend the wooden cylinder at its symmetry axis from a rigid rod. We then turn it away from its equilibrium position by a small angle φ , and let it go. See figure 3 for the setup. We find that φ describes a periodic motion with period T .

İndi isə S oxuna nəzərən sistemin I_S ətalət momentini tapmağa çalışacağıq. Silindirin S simmetriya oxundan sərt çuxuqla tavana bağlanmışdır və S oxu ətrafında sürtünməsiz fırlana bilər. Daha sonra silindiri tarazlıq vəziyyətindən kiçik φ bucağı qədər fırladaraq sərbəst buraxırlar. Qurğunun sxemi Şəkil-3 də verilib. Bu zaman görünür ki, silindirin φ bucağının periodik dəyişməsi ilə S oxu ətrafında T periodu ilə rəqs edir.

- A.2** Find the equation of motion for φ . Express the moment of inertia I_S of the system around its symmetry axis S in terms of T , b and the known quantities (1). You may assume that we are only disturbing the equilibrium position by a small amount so that φ is always very small. 0.5pt
 φ bucağından asılı hərəkət tənliyini yazın. Silindirin S oxuna nəzərən I_S ətalət momentini, məlum (1) kəmiyyətləri, b məsafəsi və T periodu ilə ifadə edin. Meyl bucağı φ -ni çox kiçik qəbul edə bilərsiniz.

From the measurements in questions **A.1** and **A.2**, we now want to determine the geometry and the position of the metal disk inside the wooden cylinder.

A1 və A2 ölçmələrinin nəticələri əsasında ağac silindirin içərisində gizlədilmiş metal diskin həndəsi

parametrlərini və yerini təyin etməyə çalışın.

A.3 Find an expression for the distance d as a function of b and the quantities (1). You may also include r_2 and h_2 as variables in your expression, as they will be calculated in subtask **A.5**. 0.4pt

d məsafəsinə b məsafəsi və məlum (1) kəmiyyətləri ilə ifadə edin. Bu zaman r_2 və h_2 kəmiyyətlərini də məlum qəbul edə bilərsiniz. Bu kəmiyyətləri A5 də hesablayacaşıq.

A.4 Find an expression for the moment of inertia I_S in terms of b and the known quantities (1). You may also include r_2 and h_2 as variables in your expression, as they will be calculated in subtask **A.5**. 0.7pt

I_S ətalət momentini b məsafəsi və məlum (1) kəmiyyətləri ilə ifadə edin. Bu zaman r_2 və h_2 kəmiyyətlərini də məlum qəbul edə bilərsiniz. Bu kəmiyyətləri A5 də hesablayacaşıq.

A.5 Using all the above results, write down an expression for h_2 and r_2 in terms of b , T and the known quantities (1). You may express h_2 as a function of r_2 . 1.1pt

Yuxarıda tapdıđınız bütün nəticələrə əsasən h_2 və r_2 kəmiyyətlərini b məsafəsi, T və məlum (1) kəmiyyətlərlə ifadə edin. h_2 -ni r_2 ilə ifadə edə bilərsiniz.

Part B. Rotating Space Station -Fırlanan kosmik stansiya (6.5 points)

Alice is an astronaut living on a space station. The space station is a gigantic wheel of radius R rotating around its axis, thereby providing artificial gravity for the astronauts. The astronauts live on the inner side of the rim of the wheel. The gravitational attraction of the space station and the curvature of the floor can be ignored.

Alisa kosmik stansiyada yaşayır. Kosmik stansiya R radiuslu nəhəng diskdən ibarətdir. Disk öz oxu ətrafında fırlanaraq kosmonavtlar üçün "süni qtavitasiya" təsiri yaradır. Kosmonavtlar gəminin içində onun divarlarının üzərində (diskin yan səthi) yaşayır.(Şəkil-4) Buna kosmik gəminin səthi (döşəməsi) deyəcəyik. Kosmik gəmi ilə kosmonavtlar arasında qravitasiya təsirini və döşəmənin (silindirin yan səthinin) ayrılığını nəzərə almamaq olar.

B.1 At what angular frequency ω_{ss} does the space station rotate so that the astronauts experience the same gravity g_E as on the Earth's surface? 0.5pt

Kosmik gəmi öz oxu ətrafında hansı ω_{ss} bucaq sürəti ilə fırlanmalıdır ki, kosmonavtlar yerin səthindəki g_E ağırlıq qüvvəsinə bərabər "süni ağırlıq qüvvəsi" hiss eləsinlər.

Alice and her astronaut friend Bob have an argument. Bob does not believe that they are in fact living in a space station and claims that they are on Earth. Alice wants to prove to Bob that they are living on a rotating space station by using physics. To this end, she attaches a mass m to a spring with spring constant k and lets it oscillate. The mass oscillates only in the vertical direction, and cannot move in the horizontal direction.

Alisa və onun kosmonavt dostu Bob mübahisə edirlər. Bob inanmır ki, onlar yerin səthində deyil, kosmik gəmidə yaşayırlar. Fiziki biliklərindən istifadə edərək Alisa doğrudan da fırlanan kosmik gəmidə yaşadıklarını isbat etmək istəyir. Bunun üçün o, elastikliyi k olan yayın ucuna m kütləli yük bərkidərək rəqs etdirir. Yük yalnız şaquli istiqamətdə hərəkət edir, üfüqi istiqamətdə (döşəməyə

paralel) hərəkət mümkün deyil.

B.2 Assuming that on Earth gravity is constant with acceleration g_E , what would be the angular oscillation frequency ω_E that a person on Earth would measure? 0.2pt
Təcrübə Yerin səthində aparılısaydı və g_E sərbəstdüşmə təcili sabit olsaydı bu rəqsin ω_E tezliyi nəyə bərabər olardı?

B.3 What angular oscillation frequency ω does Alice measure on the space station? 0.6pt
Kosmik gəmidə aparılan təcrübədə Alisa rəqsin ω tezliyi üçün hansı ifadəni əldə edər?

Alice is convinced that her experiment proves that they are on a rotating space station. Bob remains sceptical. He claims that when taking into account the change in gravity above the surface of the Earth, one finds a similar effect. In the following tasks we investigate whether Bob is right.

Alisa tam əmindir ki, bu təcrübə ilə onların yerdə yox, kosmik gəmidə yaşadığını təsdiq edə bilər. Bob isə buna inanmır. O inad edir ki, Yerin səthində də sərbəstdüşmə təcilinin dəyişdiyi nəzər alınsa eyni effekt müşahidə edilir. Aşağıdakı bölmələrdə Bobun haqlı olub olmamasını araşdırılacaq.

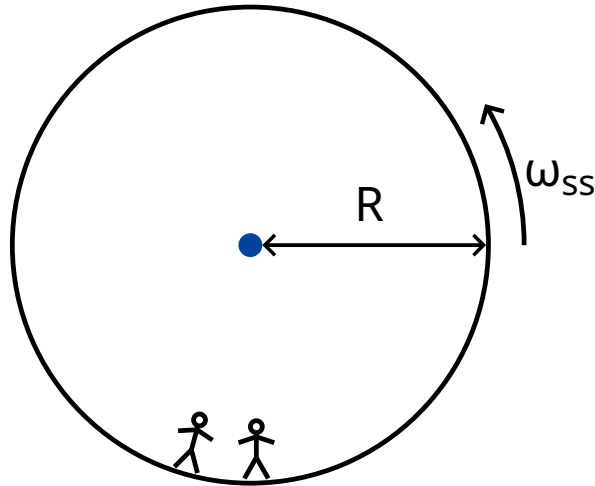


Figure 4: Space station
Şəkil-4: Kosmik gəmi

B.4 Derive an expression of the gravity $g_E(h)$ for small heights h above the surface of the Earth and compute the oscillation frequency $\tilde{\omega}_E$ of the oscillating mass (linear approximation is enough). Denote the radius of the Earth by R_E . Neglect the rotation of Earth. 0.8pt
Yerin səthinə yaxın h hündürlüklərində sərbəstdüşmə təcilinin $g_E(h)$ dəqiqləşdirilmiş ifadəsini əldə edin. Bu zaman yalnız xətti yaxınlaşmadan istifadə edin. Sərbəstdüşmə təcilinin dəqiqləşdirilmiş ifadəsindən istifadə edərək rəqsin $\tilde{\omega}_E$ tezliyinin ifadəsini yazın. Yerin R_E radiusunun verildiyini qəbul edin. Yerin öz oxu ətrafında fırlanmasını nəzərə almayın.

Indeed, for this space station, Alice does find that the spring pendulum oscillates with the frequency that

Bob predicted.

Alisa doğrudan da görür ki rəqqas Bobun dediyi tezlikdə rəqs edir.

B.5 For what radius R of the space station does the oscillation frequency ω match the oscillation frequency $\tilde{\omega}_E$ on the Earth? Express your answer in terms of R_E . 0.3pt
Kosmik gəminin radiusunun hansı R qiymətində gəmidəki rəqsin ω tezliyi ilə yerin səthindəki $\tilde{\omega}_E$ tezliyi eyni olacaq. Cavabınızı yerin radiusu R_E -ilə ifadə edin.

Exasperated with Bob's stubbornness, Alice comes up with an experiment to prove her point. To this end she climbs on a tower of height H over the floor of the space station and drops a mass. This experiment can be understood in the rotating reference frame as well as in an inertial reference frame.

Bobun inadkarlığından bezən Alisa özünün haqlı olduğunu sübut etmək üçün başqa bir təcrübə etmək istəyir. Bu məqsədlə o Kosmik stansiyanın döşəməsinin (səthin) üzərində qurulmuş H hündürlüklü qülləyə çıxaraq aşağı (gəminin kosmonavtlar yaşayan səthinə) cisim buraxır.

In a uniformly rotating reference frame, the astronauts perceive a fictitious force \vec{F}_C called the Coriolis force. The force \vec{F}_C acting on an object of mass m moving at velocity \vec{v} in a rotating frame with constant angular frequency $\vec{\omega}_{ss}$ is given by

Hesablama sistemi sabit bucaq sürəti ilə fırlandığı zaman cisimlərə \vec{F}_C -Kariolis qüvvəsi adlanan ətalət qüvvəsi təsir edir. $\vec{\omega}_{ss}$ sabit sürəti ilə fırlanan hesablama sistemində, m kütləli cisim \vec{v} sürəti ilə hərəkət etdikdə ona təsir edən Kariolis qüvvəsi aşağıdakı kimi ifadə olunur.

$$\vec{F}_C = 2m\vec{v} \times \vec{\omega}_{ss} . \quad (2)$$

In terms of the scalar quantities you may use

Qüvvənin ədədi qiyməti skalyar şəkildə aşağıdakı kimi ifadə edilir.

$$F_C = 2mv\omega_{ss} \sin \phi , \quad (3)$$

where ϕ is the angle between the velocity and the axis of rotation. The force is perpendicular to both the velocity v and the axis of rotation. The sign of the force can be determined from the right-hand rule, but in what follows you may choose it freely.

Burada ϕ bucağı sürətin istiqaməti ilə sistemin fırlanma oxu arasındakı qalan bucaqdır. Qüvvə hər zaman cismin sürəti v -yə və fırlanma oxuna perpendikulyardır. Qüvvənin istiqamətini sağ əl qaydası ilə təyin edə bilərsiniz.

B.6 Calculate the horizontal velocity v_x and the horizontal displacement d_x (relative to the base of the tower, in the direction perpendicular to the tower) of the mass at the moment it hits the floor. You may assume that the height H of the tower is small, so that the acceleration as measured by the astronauts is constant during the fall. Also, you may assume that $d_x \ll H$. 1.1pt
Cisim səthə çatan anda Kariolis qüvvəsinin hesabına cisim müəyyən bir üfüqi sürət (qülləyə perpendikulyar) qazanmış olacaq. Həmin v_x -in ifadəsini əldə edin. Cisim səthə çatana qədər üfüqi istiqamətdə hansı d_x yerdəyişməsi (qüllənin dibinə nəzərən və qülləyə perpendikulyar) edəcək? H o qədər kiçikdir ki, kosmik gəmidəki cisimlərin süni ağırlıq qüvvəsinin təcili cisim səthə çatana qədər sabit qəbul edilə bilər. Həmçinin $d_x \ll H$ qəbul edə bilərsiniz.

To get a good result, Alice decides to conduct this experiment from a much taller tower than before. To her surprise, the mass hits the floor at the base of the tower, so that $d_x = 0$.

Alisa öz nəticələrini daha da yaxşılaşdırmaq üçün birinci qüllədən daha hündür qüllə seçir. Onda müşahidə edir ki, sərbəst buraxdığı cisim qüllənin dibinə düşür. Yəni $d_x = 0$ olur və Alisa çox təcübələnir.

B.7 Find a lower bound for the height of the tower for which it can happen that $d_x = 0$. 1.3pt
Qüllənin ən kiçik hansı qiymətində $d_x = 0$ olar?

Alice is willing to make one last attempt at convincing Bob. She wants to use her spring oscillator to show the effect of the Coriolis force. To this end she changes the original setup: She attaches her spring to a ring which can slide freely on a horizontal rod in the x direction without any friction. The spring itself oscillates in the y direction. The rod is parallel to the floor and perpendicular to the axis of rotation of the space station. The xy plane is thus perpendicular to the axis of rotation, with the y direction pointing straight towards the center of rotation of the station.

Alisa Bobu inandırmaq üçün sonuncu cəhdini edir. O yaylı rəqqasdan istifadə edək kariolis qüvvəsinə təsirini göstərmək istəyir. O təcrübənin sxemini belə edir. Yayı həlqədən asır. Həlqəni isə səthə oxu çubuqğa keçirir. Həlqə keçirildiyi üfüqi ox boyunca sürtünməsiz sərbəst hərəkət edə bilər. Yay keçirilən oxun istiqamətini x , rəqslərin istiqamətini y istiqaməti kimi götürün. Çubuq səthə paralel və Kosmik gəminin fırlanma oxuna perpendikulyardır. Beləliklə xy müstəvisi fırlanma oxuna perpendikulyardır və y oxu kosmik stansiyanın fırlanma mərkəzinə yönəlib.

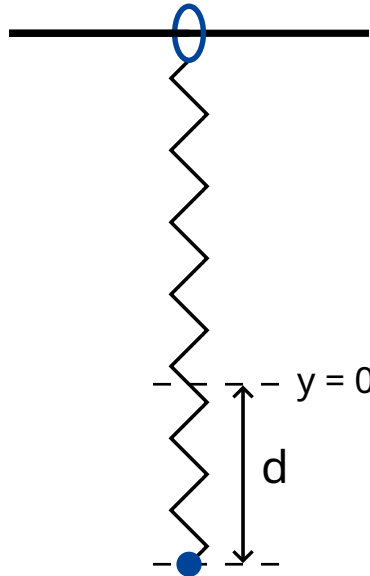


Figure 5: Setup.

B.8 Alice pulls the mass a distance d downwards from the equilibrium point $x = 0$, $y = 0$, and then lets it go (see figure 5). 1.7pt

Alisa asılı yükü tarazlıq vəziyyətindən ($x=0$, $y=0$) d qədər aşağı çəkir və buraxır. (Şəkil 5)

- Give an algebraic expression of $x(t)$ and $y(t)$. You may assume that $\omega_{ss}d$ is small, and neglect the Coriolis force for motion along the y -axis.

Yükün $x(t)$ və $y(t)$ koordinatlarının zamandan asılıqlarının cəbri ifadələrini əldə edin. $\omega_{ss}d$ -in kiçik olduğunu və y oxu boyunca təsir edən Kariolis qüvvəsinin nəzərə alınmadığını qəbul edin.

- Sketch the trajectory $(x(t), y(t))$, marking all important features such as amplitude.

$(x(t), y(t))$ -nin trayektoriyalarının şəklini çəkin. Vacib parametrləri: amplitudu v.s xüsusi qeyd edərək göstərin.

Alice and Bob continue to argue.

Alisa və Bob mübahisə etməyə davam edirlər