

Две задачи по механика (10 точки)

Преди да започнете да решавате задачата прочетете общите указания от отделния плик.

Part A. Скритият диск (3.5 точки)

Плътен дървен цилиндър има радиус r_1 и дебелина h_1 . Някъде вътре в него има дупка, в която е поместен метален цилиндър с радиус r_2 и дебелина h_2 . Металният диск е поставен така, че неговата ос на симетрия B е успоредна на оста на симетрия S на дървения цилиндър, и е разположен на едно и също разстояние от дъната на дървения цилиндър. Разстоянието между осите S и B е d . Плътноста на дървото е ρ_1 , а на метала е $\rho_2 > \rho_1$. Общата маса на дървения и металния цилиндри е M .

В това подусловие дървеният цилиндър може да се търкаля свободно по равнина. Виж Фиг. 1 за напречното и надлъжното сечение на цилиндъра.

Целта е да се определи големината и мястото на скрития метален диск.

Отговорите трябва да се изразяват чрез някои от следните известни параметри:

$$r_1, h_1, \rho_1, \rho_2, M. \quad (1)$$

Параметрите r_2, h_2 и d , трябва да се определят от индиректни измервания.

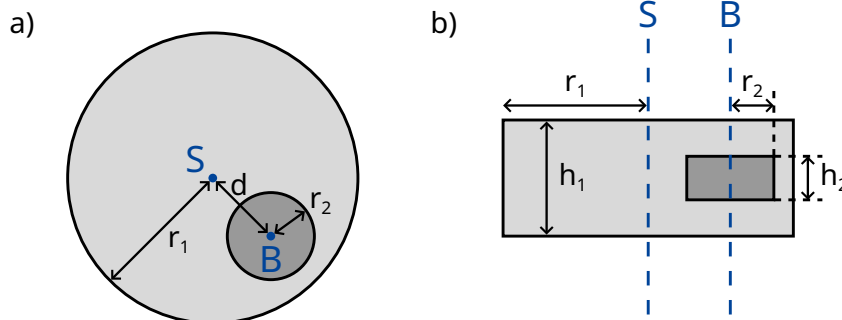


Figure 1: a) страничен поглед b) поглед отгоре

C b се означава разстоянието между центъра на масата C на цялата система и оста на симетрия S на дървения цилиндър. За да се определи то, се прави следното: Дървеният цилиндър се поставя на хоризонтална равнина, така че да може да се търкаля и да е в устойчиво равновесие. След това равнината се наклонява на ъгъл Θ (виж Fig. 2). Хлъзгане няма. В новото си равновесно положение цилиндърът е завъртян на ъгъл ϕ , който се измерва.

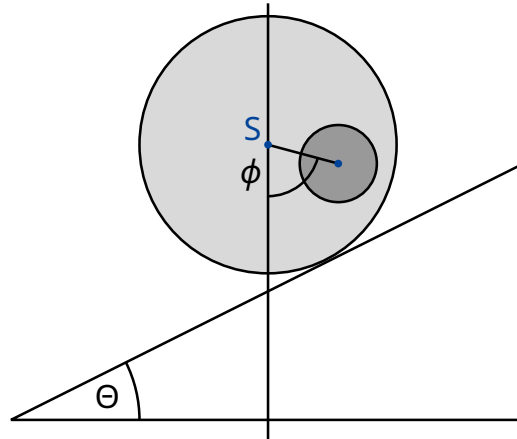


Figure 2: Цилиндър върху наклонена равнина

- A.1** Намерете израз за b като функция на параметри от (1), ъгъла на завъртане ϕ и ъгъла на наклон на равнината Θ . 0.8pt

Оттук нататък се приема, че стойността на b е известна.

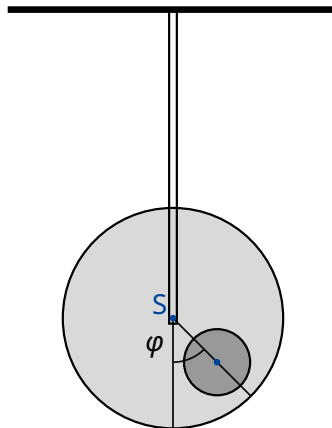


Figure 3: Окачено тяло.

Сега ще измерим инерчния момент I_S на тялото спрямо оста на симетрия S . Дървеният цилиндър е окачен на неподвижна пръчка. Завърта се на малък ъгъл φ от равновесното си положение и се пуска. Виж figure 3. Тялото започва да трепти въртливо с период T .

- A.2** Намерете уравнението на движение за φ . Изразете инерчния момент I_S на системата около оста S чрез T , b и известни параметри от (1). Ъгълът φ е винаги много малък. 0.5pt

От измерванията в подусловия **A.1** и **A.2**, могат да се определят размерите и положението на ме-

талния диск вътре в дървения цилиндър.

A.3 Намерете израз за разстоянието d като функция на b и параметри от (1). Може да включите и r_2 и h_2 като променливи в израза, тъй като ще бъдат определени в подусловие **A.5**. 0.4pt

A.4 Намерете израз за инерчния момент I_S като функция на b и известни параметри от (1). Може да включите и r_2 и h_2 като променливи в израза, тъй като те ще се определят в подусловие **A.5**. 0.7pt

A.5 Използвайки по-горните резултати намерете изрази за h_2 и r_2 , изразени чрез b , T и известни параметри от (1). Може да изразите и h_2 като функция на r_2 . 1.1pt

Part B. Въртяща се космическа станция (6.5 points)

Алиса е астронавт и живее на космическа станция. Станцията е голямо колело с радиус R , въртящо се около оста си, като така създава изкуствена гравитация за астронавтите. Астронавтите живеят от вътрешната страна на колелото, както е показано на фигурата. Кривината на пода на станцията се пренебрегва.

B.1 С каква ъглова скорост ω_{ss} трябва да се върти колелото, така че астронавтите да изпитват същото гравитационно ускорение g_E , както на Земята? 0.5pt

Алиса спори с друг астронавт, Боб. Боб не вярва, че те живеят на космическа станция и твърди, че са на Земята. Чрез физични аргументи Алиса иска да докаже на Боб, че те се намират на въртящо се колело. За целта тя окачва маса m на вертикална пружина с коефициент на еластичност k и я оставя да трепти. Масата може да трепти само във вертикално направление.

B.2 Каква кръгова честота ω_E би измерил наблюдател на Земята, ако приеме, че земното ускорение g_E не зависи от височината? 0.2pt

B.3 Каква реална кръгова честота ω измерва Алиса на космическата станция? 0.6pt

Боб продължава да се съмнява. Той твърди, че ако се отчете изменението на земното ускорение с височината би се получил същият ефект. По-долу ще проверите дали Боб е прав.

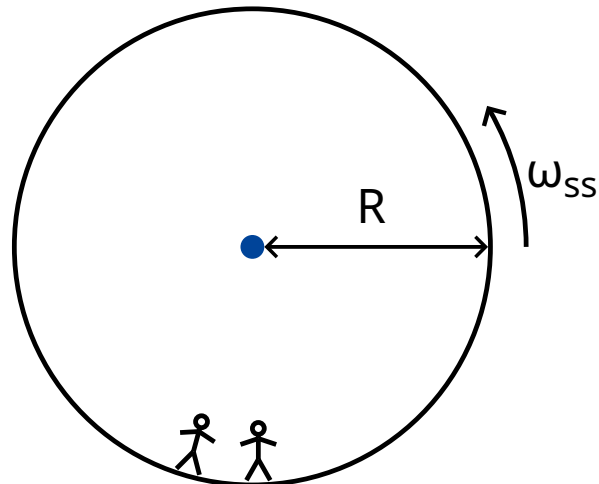


Figure 4: Космическа станция

- B.4** Получете израз за земното ускорение $g_E(h)$ на малка височина h над земната повърхност (достатъчно е линейно приближение) и определете кръговата честота $\tilde{\omega}_E$ на трептене на окачената маса. Означете радиуса на Земята с R_E . Въртенето на Земята се пренебрегва. 0.8pt

Алиса установява, че на станцията пружинното махало трепти с честотата, която предсказва Боб.

- B.5** При какъв радиус R на станцията кръговата честота ω е равна на честотата $\tilde{\omega}_E$ на Земята? Изразете отговора чрез R_E . 0.3pt

Алиса предлага нов експеримент. Тя се изкачва на кула с височина H над пода на станцията и пуска оттам малко тяло. Опитът може да бъде анализиран както спрямо въртяща се отправна система, така и спрямо инерциална система.

Във въртящата се система космонавтът чувства въображаема сила \vec{F}_C , наречена Кориолисова сила. Силата \vec{F}_C , действаща на тяло с маса m , което се движи със скорост \vec{v} спрямо въртящата се с ъглова скорост $\vec{\omega}_{ss}$ система, се дава с:

$$\vec{F}_C = 2m\vec{v} \times \vec{\omega}_{ss} . \quad (2)$$

За големината на силата имаме:

$$F_C = 2mv\omega_{ss} \sin \phi , \quad (3)$$

където ϕ е ъгълът между скоростта на тялото и оста на въртене. Силата е перпендикулярна както на скоростта, така и на оста на въртене. Посоката на силата може да се определи по правилото на дясната ръка. Крайният резултат обаче няма да се промени, ако объркате посоката с противоположната.

- B.6** Пресметнете хоризонталната скорост v_x и хоризонталното отместване d_x (спрямо основата на кулата, перпендикулярно спрямо кулата) на тялото, когато достига пода на станцията. Примете, че височината H на кулата е толкова малка, че ускорението на свободно падане се приема за постоянно. Можете да приемете също, че: $d_x \ll H$. 1.1pt

За по-убедителен резултат, Алиса повтаря опита, като пуска тялото от много по-висока кула. За нейна изненада тялото пада на пода точно в основата на кулата, т.е. $d_x = 0$.

- B.7** Намерете най-малката възможна височина на кулата, при която $d_x = 0$. 1.3pt

Алиса прави последен опит, с който иска да докаже действието на Кориолисова сила при трептенето на пружинното махало. За целта горният край на пружината е закрепен към лек пръстен, който се хлъзга без триене по хоризонтална пръчка в посока на оста x . Пружината е успоредна на оста y . Пръчката е успоредна на пода и е перпендикулярна на оста на въртене на станцията. Равнината xy е перпендикулярна на оста на въртене, като оста y е насочена към центъра на колелото.

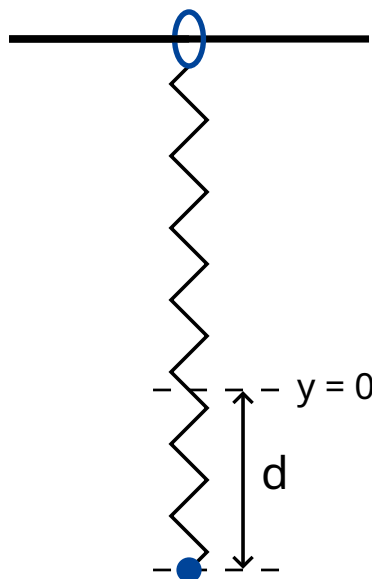


Figure 5: Нова експериментална установка.

- B.8** Алиса отклонява окаченото тяло на разстояние d надолу спрямо равновесната точка $x = 0, y = 0$, и го пуска да трепти (виж figure 5). 1.7pt
- Получете изрази за $x(t)$ и $y(t)$. Примете, че $\omega_{ss}d$ е малка величина. Не отчитайте Кориолисовата сила при движение в направление на оста y .
 - Нарисувайте качествено траекторията $(x(t), y(t))$, като означите по-важните характеристики, например амплитудата.