Dva zadatka iz mehanike (10 poena)

Molimo vas da prije nego što počnete sa izradom zadatka pročitate opšte upute koje su date u odvojenoj koverti.

Dio A. Skriveni disk (3.5 poena)

Posmatrat ćemo jedan puni drveni cilindar radijusa r_1 i debljine h_1. Negdje unutar drvenog cilindra drvo je zamijenjeno sa metalnim diskom radijusa r_2 i deljine h_2. Metalni disk je postavljen tako da je njegova osa simetrije B paralelna sa osom simetrije S drvenog cilindra, a postavljen je na istoj udaljenosti od gornje i donje površine drvenog cilindra. Označit ćemo udaljenost između S i B sa d. Gustina drveta je ρ_1, gustina metala je $\rho_2 > \rho_1$. Ukupna masa drvenog cilindra i metalnog diska unutar njega je M.

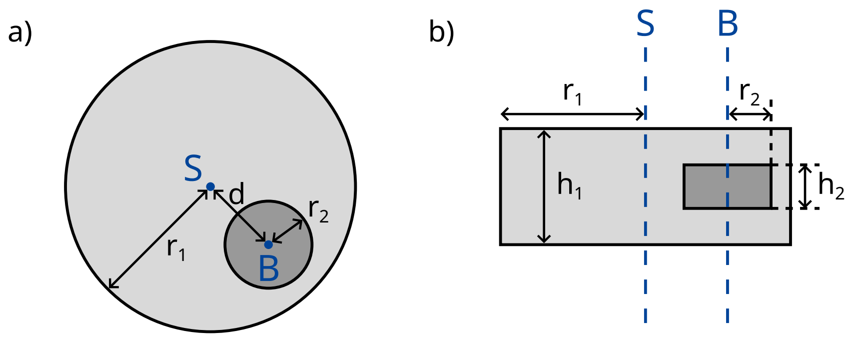
U ovom zadatku drveni cilindar se postavi na tlo tako da se može slobodno kotrljati lijevo i desno. Na slici 1 dat je pogled postavke sa bočne strane i pogled odozgo.

Cilj zadatka je da se odredi veličina i položaj metalnog diska.

Ubuduće, kada vas pitamo da izrazite rezultat preko poznatih veličina, uvijek možete pretpostaviti da su slijedeće veličine poznate:

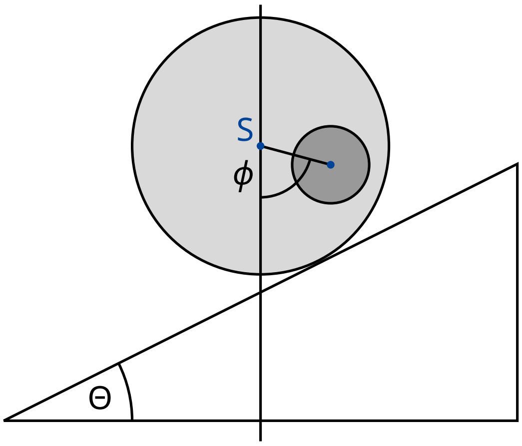
$$r_1,\ h_1,\ \rho_1,\ \rho_2, M\ . \tag{1}$$

Cilj nam je da odredimo r_2, h_2 i d, preko indirektnih mjerenja.



Slika 1: a) pogled sa strane b) pogled odozgo

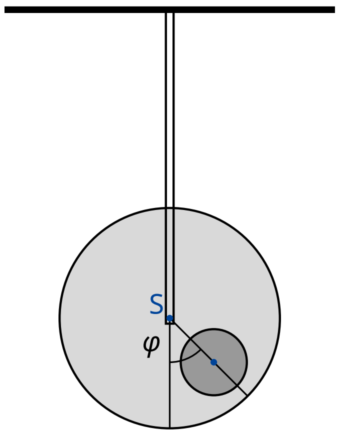
Označimo sa b udaljenost između centra mase C cijelog sistema i ose simetrije S drvenog cilindra. Da bi odredili tu udaljenost napravimo sljedeći eksperiment: Postavimo drveni cilindar na horizontalnu ravnu podlogu tako da bude u stanju stabilne ravnoteže. Sada lagano podižimo tu ravnu podlogu za neki ugao Θ (vidi sliku 2). Kao rezultat statičkog trenja, drveni cilindar se može slobodno kotrljati bez klizanja. On će se kotrljati malo niz strmu ravan, ali će se potom zaustaviti i doći u položaj stabilne ravnoteže nakon rotiranja za neki ugao ϕ koji mi mjerimo.



Slika 2: Cilindar na strmoj ravni.

A.1	Odredite izraz za b u zavisnosti od veličina (1), ugla ϕ i ugla nagiba strme ravni Θ.	0.8pt

Od sada, možemo pretpostaviti da je vrijednost b poznata.



Slika 3: Obješeni sistem.

Sljedeće što želimo je da mjerimo moment inercije I_S sistema u odnosu na osu simetrije S. Da bismo to uradili, objesimo drveni cilindar u tački S za nedeformabilni štap.

Potom ga izvedemo iz položaja ravnoteže za neki mali ugao φ, i pustimo. Na Slici 3 data je ta postavka. Dobivamo da ugao φ opisuje periodično kretanje sa periodom T.

A.2	Nađite diferencijalnu jednačinu kretanja koja opisuje promjenu φ? Izrazite moment inercije I_S sistema oko njegove ose simetrije S preko veličina T, b i poznatih veličina (1). Možete pretpostaviti da smo ravnotežni položaj samo malo narušili pomjeranjem za malu vrijednost tako da je φ uvijek vrlo mali ugao.	0.5pt

Iz mjerenja u dijelovima zadatka **A.1** i **A.2**, sada hoćemo da odredimo geometriju i položaj metalnog diska koji se nalazi unutar drvenog cilindra.

A.3	Odredite izraz za udaljenost d u zavisnosti od b i poznatih veličina (1). Možete takođe uključiti r_2 i h_2 kao promjenljive u svom izrazu, pošto će one biti izračunate u podzadatku **A.5**	0.4pt

A.4	Odredite izraz za moment inercije I_S preko veličine b i poznatih veličina (1). Možete takođe uključiti r_2 i h_2 kao promjenljive u svom izrazu, pošto će one biti izračunate u podzadatku **A.5.**	0.7pt

A.5	Koristeći sve gornje rezultate, napišite zasebno izraze za h_2 i r_2 preko b, T i poznatih veličina (1). Nakon što nađete izraz za r_2 možete izraziti h_2 u zavisnosti od r_2.	1.1pt

Dio B. Rotirajuća svemirska stanica (6.5 poena)

Alice je astronaut koji živi na svemirskoj stanici. Svemirska stanica je jedan ogromni točak radijusa R koji rotira oko svoje ose i tako astronautima stvara vještačku gravitaciju . Astronauti žive na unutrašnjoj strani oboda točka. Gravitaciono privlačenje svemirske stanice i zakrivljenost poda stanice mogu se zanemariti.

B.1	Kojom kružnom frekvencijom ω_{ss} treba da rotira svemirska stanica tako da astronauti osjete istu gravitaciju g_E kao na površini Zemlje?	0.5pt

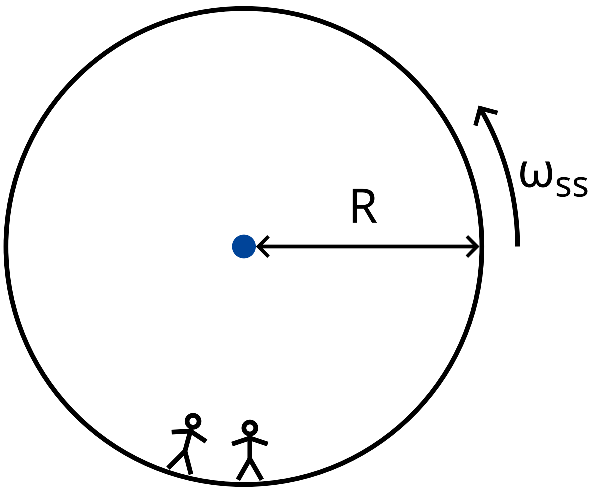
Alice i njen prijatelj astronaut Bob ne slažu se po jednom pitanju. Bob ne vjeruje da oni ustvari žive u svemirskoj stanici i tvrdi da su oni na Zemlji. Alice hoće da uvjeri Boba da oni žive na rotirajućoj svemirskoj stanici koristeći se pri tome fizikom. Da bi to uradila ona je zakačila jednu masu m na oprugu čija je konstanta k i pustila je da osciluje. Masa osciluje samo u vertikalnom pravcu i ne može se kretati u horizontalnom pravcu.

B.2	Pretpostavljajući da je ubrzanje zemljine teže tj. gravitacija konstantna i jednaka ubrzanju g_E, čemu bi bila jednaka kružna frekvencija oscilacija ω_E koju bi neka osoba na Zemlji mogla izmjeriti ?	0.2pt

B.3	Čemu je jednaka kružna frekvencija oscilacija ω koju izmjeri Alice na svemirskoj stanici?	0.6pt

Alice je ubjeđena da njen eksperiment potvrđuje da se oni nalaze na svemirskoj stanici. Međutim, Bob ostaje sumnjičav. On tvrdi da kada bi se uzela u obzir promjena gravitacionog ubrzanja sa visinom iznad površine Zemlje, mogao bi se dobiti sličan efekat.

U sljedećim zadacima ćemo istražiti da li je Bob u pravu.



Slika 4: Svemirska stanica

B.4	Izvedite izraz za gravitaciju $g_E(h)$ na maloj visini h iznad površine Zemlje i izračunajte kružnu frekvenciju $\tilde{\omega}_E$ (dovoljno je u razvoju zadržati se na članovima prvog reda - linearna aproksimacija). Označite radijus Zemlje sa R_E. Zanemarite rotaciju Zemlje	0.8pt

Dakle, za ovu svemirsku stanicu Alice je dobila da klatno sa oprugom osciluje sa frekvencijom koju je Bob predvidio.

B.5	Čemu treba biti jednak radijus R svemirske stanice, da bi frekvencija oscilacija ω odgovarala frekvenciji oscilacija $\tilde{\omega}_E$ na Zemlji? Izrazite svoj odgovor preko R_E.	0.3pt

Iznervirana Bobovom tvrdoglavošću, Alice dolazi na ideju da napravi eksperiment kako bi ga uvjerila u svoj stav. Da bi to napravila popela se na toranj visine H iznad poda svemirske stanice i pustila neku masu. Ovaj eksperiment se u nekim dijelovima može shvatiti i riješiti ako ga posmatramo u rotirajućem sistemu referencije, a u nekim dijelovima ako ga posmatramo u inercijalnom sistemu referencije.

U uniformno rotirajućem sistemu referencije, astronauti opažaju jednu fiktivnu silu $\vec{F}_C$ koja se zove Coriolisova sila. Ta sila $\vec{F}_C$ koja djeluje na objekat mase m koji se kreće brzinom $\vec{v}$ u rotirajućem sistemu referencije sa konstantnom kružnom frekvencijom $\vec{\omega}_{ss}$ je data sa

$$\vec{F}_C = 2m\vec{v} \times \vec{\omega}_{ss} \ . \tag{2}$$

U skalarnom obliku vi možete koristiti izraz

$$F_C = 2mv\omega_{ss} \sin\phi \ , \tag{3}$$

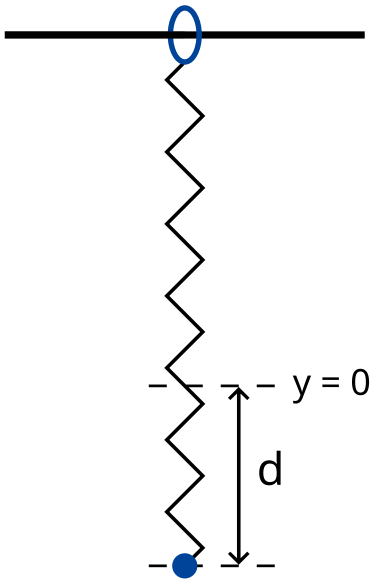
gdje je ϕ ugao između pravca brzine i ose rotacije. Sila je okomita na oboje i na brzinu v i na osu rotacije. Predznak sile može se odrediti pomoću pravila desne ruke, premda vi u onom što slijedi možete slobodno odabrati predznak.

B.6	Izračunajte horizontalnu brzinu v_x i horizontalno pomjeranje d_x (u odnosu na osnovu tornja, u pravcu okomitom na toranj) mase, u trenutku kada ona padne na dno. Možete pretpostaviti da je visina H tornja mala, tako da je ubrzanje koje mjere astronauti konstantno za vrijeme padanja . Isto tako možete pretpostaviti da je $d_x \ll H$.	1.1pt

Da bi dobila dobar rezultat, Alice je odlučila da izvede ovaj eksperiment na tornju koji je mnogo viši od tornja koji je prethodno koristila. Na njeno iznenađenje, masa udara u dno stanice tačno u podnožju tornja, tako da je $d_x = 0$.

B.7	Nađite donju granicu tj. najmanji odnos visine tornja i radijusa stanice za koju se može desiti da je $d_x = 0$.	1.3pt

Alice je odlučila napraviti još jedan posljednji pokušaj da uvjeri Boba. Ona želi da koristi svoj oscilator sa oprugom kako bi pokazala efekat Coriolisove sile. Zbog toga je promijenila svoju originalnu postavku: Zakačila je oprugu na jedan prsten koji može da slobodno klizi duž jedne horizontalne šipke u pravcu x bez ikakvog trenja. Opruga sama osciluje u vertikalnom y pravcu. Šipka je paralelna sa podom i okomita na osu rotacije svemirske stanice. Ravan xy je tako okomita na osu rotacije, sa y pravcem koji pokazuje pravac ravno prema centru rotacije stanice.



Slika 5: Postavka.

B.8	Alice u početnom trenutku povuče masu za udaljenost d ispod ravnotežnog položaja određenog sa $x = 0$, $y = 0$, i potom je pusti da se kreće (vidi sliku 5). • Riješite jednačine kretanja te tako nađite $x(t)$ i $y(t)$. Pretpostavite da je $\omega_{ss}d$ malo i zanemarite Coriolisovu silu za kretanje duž y-ose. • Skicirajte trajektoriju $(x(t), y(t))$, i na skici naznačite sve značajne činjenice i oznake kao što je na primjer amplituda.	1.7pt

Alice i Bob nastavljaju se prepirati.