

Две задачи по механике (10 баллов)

Прежде чем приступить к выполнению этого задания, ознакомьтесь с общими указаниями, находящимися в отдельном конверте.

Часть А. Скрытый диск (3.5 балла)

Рассмотрим деревянный цилиндр, имеющий радиус r_1 и толщину h_1 . Где-то внутри цилиндра находится металлический диск, имеющий радиус r_2 и толщину h_2 . Металлический диск размещен таким образом, что его ось симметрии B параллельна оси симметрии S деревянного цилиндра. Металлический диск расположен на одинаковом расстоянии от верхней и нижней поверхности деревянного цилиндра. Обозначим расстояние между S и B через d . Плотность древесины равна ρ_1 , плотность металла равна $\rho_2 > \rho_1$. Общая масса деревянного цилиндра вместе с металлическим диском внутри равна M .

В этой части задачи цилиндр все время находится в поле тяжести Земли. На Рисунке 1 показаны вид цилиндра сбоку и сверху.

В этом задании необходимо определить размер металлического диска и его положение внутри деревянного цилиндра.

В дальнейшем, выражайте ваши результаты через следующие величины, которые считаются известными:

$$r_1, h_1, \rho_1, \rho_2, M. \quad (1)$$

Таким образом, целью задачи состоит в определении r_2, h_2 и d .

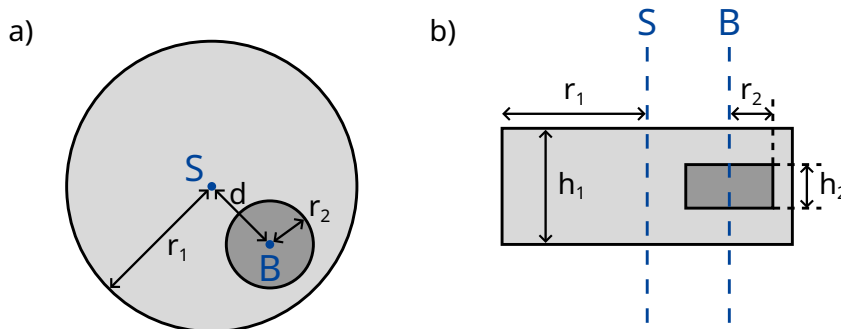


Рисунок 1 - (а) Вид сбоку, (б) Вид сверху

Пусть расстояние между центром масс всей системы C и осью симметрии цилиндра S равно b . Для определения этого расстояния, выполним следующий эксперимент: разместим деревянный цилиндр на горизонтальном основании таким образом, чтобы он находился в состоянии устойчивого равновесия. Медленно наклоним основание на угол Θ (Рисунок 2). Считайте, что диск может двигаться вдоль основания без проскальзывания. Повернувшись на некоторый угол ϕ , цилиндр остановится и придет в состояние устойчивого равновесия.

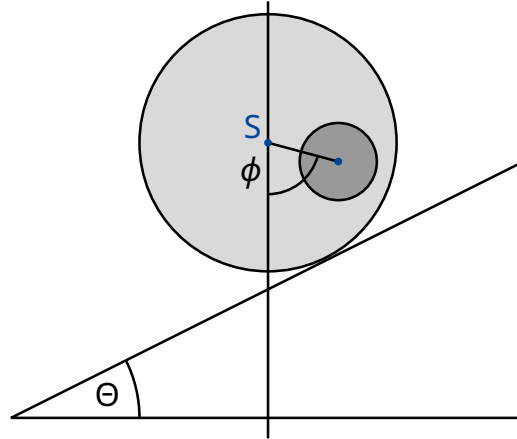


Рисунок 2 - Цилиндр на наклонной плоскости

A.1 Найдите выражение для b как функцию величин (1), угла ϕ и угла наклона основания Θ . 0.8pt

С этого момента считайте значение b известным.

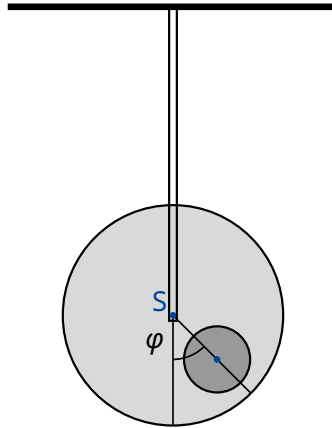


Рисунок 3: Подвешенный цилиндр.

Теперь необходимо определить момент инерции цилиндра I_S относительно оси симметрии S . Для этого подвесим деревянный цилиндр на жестком стержне, так что он может свободно вращаться вокруг неподвижной горизонтальной оси симметрии. Отклоним цилиндр на небольшой угол ϕ , от положения равновесия, смотрите Рисунок 3. Известно, что изменение угла ϕ описывается гармонической функцией с периодом T .

- A.2** Запишите уравнение, описывающее изменение угла ϕ со временем. Выразите момент инерции цилиндра I_S относительно оси симметрии S через T , b и известные величины (1). Считайте что в любой момент времени угол ϕ очень мал. 0.5pt

Используя результаты пунктов **A.1** и **A.2**, определим размеры и положение металлического диска внутри деревянного цилиндра.

- A.3** Найдите выражение для расстояния d как функцию величины b и известных величин (1). В этом выражении вы также можете использовать переменные r_2 и h_2 , так как они будут рассчитываться в пункте **A.5**. 0.4pt

- A.4** Найдите выражение для расстояния I_S как функцию величины b и известных величин (1). В этом выражении вы также можете использовать переменные r_2 и h_2 , так как они будут рассчитываться в пункте **A.5**. 0.7pt

- A.5** Используя результаты полученные выше, запишите выражения для величин h_2 и r_2 в зависимости от b , T и известных величин (1). Вы можете выразить h_2 как функцию r_2 . 1.1pt

Часть В. Вращающаяся космическая станция (6.5 баллов)

Космонавт Алиса живет на космической станции. Космическая станция представляет собой гигантское колесо радиусом R , которое вращается вокруг своей оси и тем самым искусственно обеспечивает гравитацию для космонавтов. Космонавты живут на внутренней стороне обода колеса. Сама космическая станция настолько легкая, что ее гравитационным притяжением можно пренебречь.

- B.1** С какой угловой частотой ω_{ss} должна вращаться космическая станция, чтобы космонавты испытывали ту же силу тяжести g_E , что и на поверхности Земли? 0.5pt

Алиса и другой космонавт Боб вступают в спор. Боб не верит, что они в самом деле живут на космической станции и утверждает, что они находятся на земле. Прибегнув к помощи физики, Алиса хочет доказать Бобу, что они действительно живут на вращающейся космической станции. Для этого она прикрепляет груз, имеющий массу m , к пружине с коэффициентом жесткости k и приводит его в колебания. Считайте что груз колеблется относительно станции только в радиальном направлении.

- B.2** Чему была бы равна угловая частота колебаний ω_E , если бы опыт проводился на поверхности Земли, где ускорение свободного падения постоянно и равно g_E . 0.2pt

- B.3** Найдите, какую угловую частоту колебаний ω измерит Алиса на космической станции. 0.6pt

Алиса поставила эксперимент и уверена в том, что его результаты доказывают их местонахождение.

ние на вращающейся космической станции. Боб по-прежнему настроен скептически. Он утверждает, что такой же результат можно получить и находясь на поверхности Земли, если учесть изменение ускорения свободного падения с высотой.

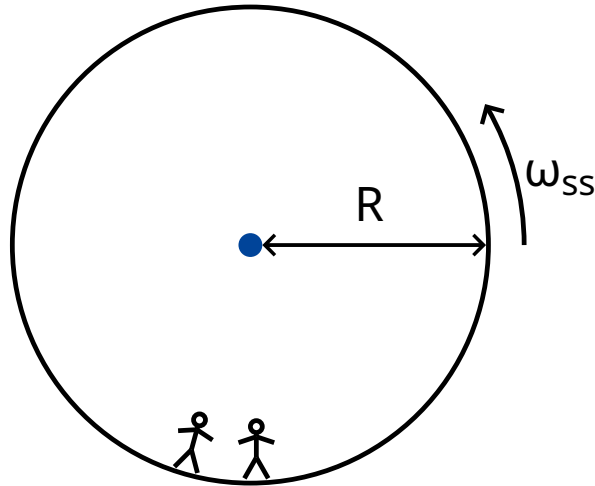


Рисунок 4: Вращающаяся космическая станция

- B.4** Получите выражение для ускорения свободного падения $g_E(h)$ при малых высотах h над поверхностью Земли и вычислите угловую частоту колебаний $\tilde{\omega}_E$. Радиус Земли равен R_E . 0.8pt

И в самом деле, Алиса находит, что пружинный маятник колеблется с предсказанной Бобом частотой.

- B.5** При каком радиусе космической станции R частота колебаний ω совпадает с частотой колебаний $\tilde{\omega}_E$ на поверхности земли? Выразите ответ через R_E . 0.3pt

Раздраженная упрямством Боба, Алисе приходит в голову идея использовать другой эксперимент, чтобы доказать свою точку зрения. С этой целью она поднимается на башню высотой H над поверхностью космической станции и отпускает небольшое тело. Заметьте что результаты этого эксперимента можно описать как во вращающейся, так и в инерциальной системах отсчета.

Сила Кориолиса является фиктивной силой инерции, появляющейся в равномерно вращающейся системе отсчета. Сила \vec{F}_C , действующая на тело массой m , движущееся со скоростью \vec{v} в системе отсчета, вращающейся с постоянной угловой скоростью $\vec{\omega}_{ss}$, задается следующей формулой

$$\vec{F}_C = 2m\vec{v} \times \vec{\omega}_{ss}. \quad (2)$$

В скалярном виде вы можете использовать

$$F_C = 2mv\omega_{ss} \sin \phi, \quad (3)$$

где ϕ угол между вектором скорости и осью вращения. Сила перпендикулярна как к скорости v , так и к оси вращения. Знак силы можно определить по правилу правой руки, но в дальнейшем вы можете свободно выбрать его по своему усмотрению.

- B.6** Вычислите горизонтальную составляющую скорости v_x и смещение d_x тела относительно основания башни в момент когда оно ударится о поверхность станции. Считайте что высота башни H очень мала, так что центробежное ускорение остается постоянным в процессе падения. Также считайте, что $d_x \ll H$. 1.1pt

Для того, чтобы получить более убедительный результат, Алиса решает провести еще один эксперимент, сбросив тело с гораздо более высокой башни. К ее удивлению, тело падает на поверхность у самого основания башни, так что $d_x = 0$.

- B.7** Найдите минимальную высоту башни, при которой $d_x = 0$. 1.3pt

Алиса готова сделать последнюю попытку, чтобы убедить Боба. Она снова хочет использовать пружинный маятник, но на этот раз показать влияние силы Кориолиса. С этой целью она прикрепляет пружину к кольцу, которое может свободно скользить по горизонтальному стержню в направлении оси x , без трения. Сама пружина колеблется в направлении оси y . Стержень параллелен поверхности станции и перпендикулярен ее оси вращения. Плоскость xy , таким образом, перпендикулярна оси вращения, причем ось y указывает прямо на центр вращения станции.

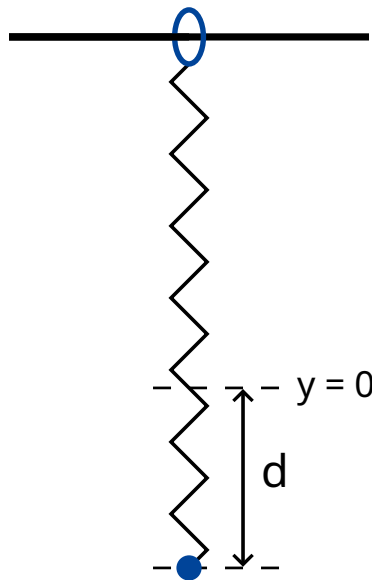


Рисунок 4 - Пружинный маятник на стержне

- B.8** Алиса сдвигает тело на расстояние d вниз от точки равновесия $x = 0, y = 0$ и отпускает его (Рисунок 4) 1.7pt
- Найдите зависимости координат $x(t)$ и $y(t)$ от времени, считая величину $\omega_{ss}d$ малой. Влиянием силы Кориолиса на движение вдоль оси y можно пренебречь.
 - Схематически нарисуйте траекторию движения тела $(x(t), y(t))$, отметив положения всех характерных точек, таких как крайние положения.

Алиса и Боб так и продолжают спорить...