Dos Problemas de Mecánica (10 puntos)

Por favor asegúrese de leer las instrucciones generales del sobre adjunto antes de comenzar a resolver este problema.

Parte A. El Disco Escondido (3.5 puntos)

Consideramos un cilindro de madera de radio r_1 y grosor h_1. En algún lugar dentro del cilindro de madera, la madera ha sido reemplazada por un disco de metal de radio r_2 y grosor h_2 . El disco de metal está ubicado de tal forma que su eje de simetría B es paralelo al eje de simetría del cilindro de madera S. El disco de metal se coloca a la misma distancia de la cara superior y de la parte inferior del cilindro de madera. Denotamos la distancia entre S y B como d. La densidad de la madera es ρ_1, y la del metal es $\rho_2 > \rho_1$. La masa total del cilindro de madera con el disco de metal en su interior es M.

En este problema, colocamos el cilindro sobre una base horizontal de tal forma que pueda rodar libremente hacia la izquierda y la derecha. Vea la Figura 1 para una vista lateral y una vista desde arriba del montaje.

El objetivo de esta parte del problema es determinar el tamaño y la posición del disco de metal.

En lo que sigue, cuando se le pida expresar el resultado en términos de cantidades conocidas, puede asumir que las cantidades conocidas son:

$$r_1,\ h_1,\ \rho_1,\ \rho_2, M\ . \tag{1}$$

El objetivo es determinar r_2, h_2 y d a por medio de mediciones indirectas.

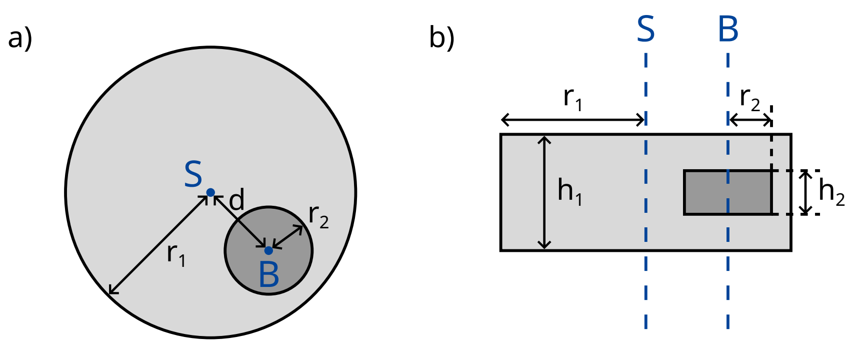

Figura 1: a) vista lateral b) vista desde arriba.

Denotamos b a la distancia entre el centro de masa de todo el sistema C y el eje de simetría S del cilindro. Para determinar esta distancia diseñamos el siguiente experimento: ubicamos el cilindro sobre una base horizontal de manera que se encuentre en equilibrio estable. Ahora inclinamos la base lentamente hasta formar un ángulo Θ con la horizontal (ver Fig. 2). Como resultado de la fricción estática, el cilindro puede rodar libremente sin deslizar. El cilindro rueda un poco hacia abajo y llega al reposo en equilibrio estable luego de rotar un ángulo ϕ que medimos.

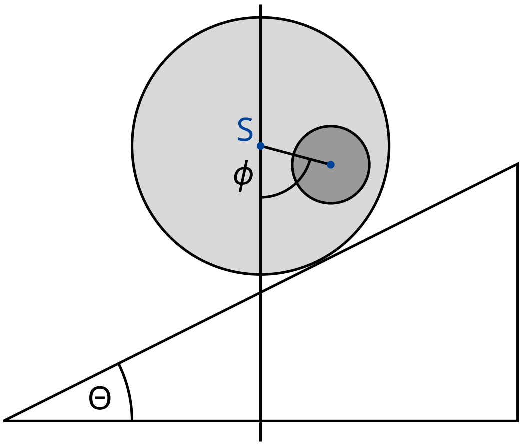

Figura 2: Cilindro sobre base inclinada.

A.1	Encuentre una expresión para b como función de las cantidades (1), el ángulo ϕ y el ángulo de inclinación de la base Θ .	0.8pt

Desde ahora asumiremos que el valor de b es conocido.

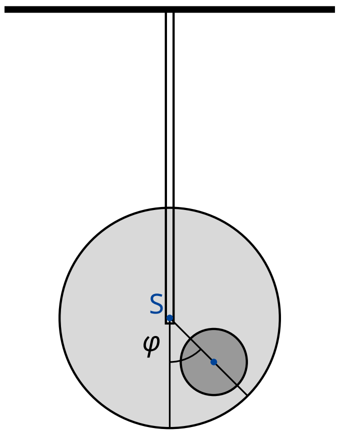

Figura 3: Sistema suspendido

A continuación queremos medir el momento de inercia I_S del cilindro con respecto al eje de simetría S. Para esto suspendemos de una barra el cilindro de madera en su eje de simetría. Luego lo giramos ligeramente de su posición de equilibrio en un ángulo φ y lo soltamos. Vea la figura 3 para el montaje. Encontramos que φ describe un movimiento periódico con período T.

A.2	Encuentre la ecuación de movimiento para φ. Exprese el momento de inercia I_S del sistema alrededor de su eje de simetría S en términos de T, b y las cantidades conocidas (1). Puede asumir que solo perturbamos el equilibrio ligeramente, de tal forma que φ siempre es pequeño.	0.5pt

Partiendo de las mediciones de las preguntas **A.1** y **A.2** queremos determinar la geometría y la posición del disco de metal dentro del cilindro de madera.

A.3	Encuentre una expresión para la distancia d como función de b y las cantidades (1). También puede incluir r_2 y h_2 como variables en su expresión, ya que se calcularán en la subtarea **A.5**.	0.4pt

A.4	Encuentre una expresión para el momento de inercia I_S en términos de b y las cantidades conocidas (1). También puede incluir r_2 y h_2 como variables en su expresión, ya que se calcularán en la subtarea **A.5**.	0.7pt

A.5	Usando todos los resultados anteriores, escriba una expresión para h_2 y r_2 en términos de b, T y las cantidades conocidas (1). Usted puede expresar h_2 como función de r_2.	1.1pt

Parte B. Estación espacial en rotación (6.5 puntos)

Alice es una astronauta viviendo en una estación espacial. La estación espacial es una rueda gigante de radio R rotando alrededor de su eje de tal forma que provee gravedad artificial a los astronautas. Los astronautas viven en el costado interior de la rueda. La atracción gravitacional de la estación espacial y la curvatura del suelo pueden ser ignoradas.

B.1	¿Con qué frecuencia angular ω_{ss} debe rotar la estación espacial para que los astronautas perciban la misma aceleración gravitacional g_E que en la superficie de la tierra?	0.5pt

Alice y su amigo astronauta Bob tienen un desacuerdo. Bob no cree que en realidad estén viviendo en una estación espacial sino en la Tierra. Alice quiere probarle a Bob, usando la física, que en realidad viven en una estación espacial rotando. Con este objetivo, Alice amarra una masa m a un resorte con constante elástica k y la deja oscilar. La masa oscila únicamente en la dirección vertical y no se puede mover en la dirección horizontal.

B.2	Asumiendo que la aceleración gravitacional sobre la tierra es constante con valor g_E, ¿cuál seria la frecuencia de oscilación ω_E que uno mediría estando sobre la Tierra?	0.2pt

B.3	¿Qué frecuencia de oscilación ω medirá Alice en la estación espacial?	0.6pt

Alice esta convencida de que su experimento comprueba que se encuentran en una estación espacial rotando. Bob permanece escéptico. Él asegura que al tomar en cuenta el cambio de la gravedad sobre la superficie de la tierra, uno encuentra un efecto similar. En las siguientes tareas investigaremos si Bob tiene razón.

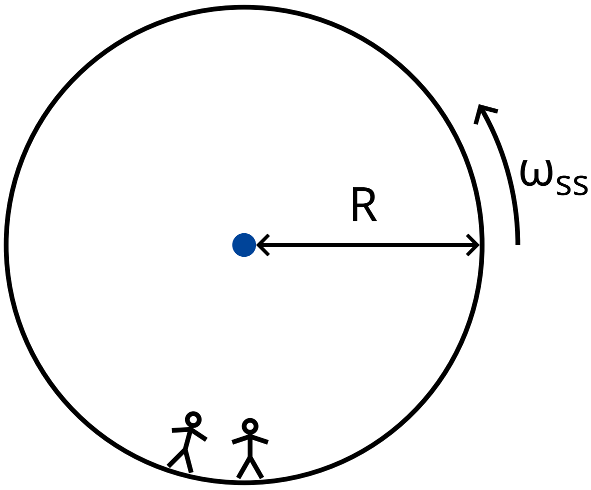

Figure 4: Estación espacial

B.4	Derive una expresión para la gravedad $g_E(h)$ para altitudes bajas h sobre la superficie de la tierra y calcule la frecuencia angular $\tilde{\omega}_E$ (una aproximación lineal es suficiente). El radio de la tierra está dada por R_E. Desprecie la rotación de la Tierra.	0.8pt

En efecto, para esta estación espacial, Alice encuentra que el resorte oscila con la frecuencia que Bob predijo.

B.5	¿Para qué radio R de la estación espacial, coincidirá ω con la frecuencia de oscilación $\tilde{\omega}_E$ sobre la superficie de la tierra? Exprese su respuesta en términos de R_E.	0.3pt

Exasperada con la terquedad de Bob, a Alice se le ocurre un experimento para probar su argumento. Para esto, sube a una torre de altura H con respecto a la base de la estación espacial y suelta una masa. Este experimento puede ser entendido en el marco de referencia rotatorio así como en un marco de referencia inercial.

En un marco de referencia rotando uniformemente, los astronautas perciben una fuerza ficticia $\vec{F}_C$llamada fuerza de Coriolis. La fuerza $\vec{F}_C$ que actúa sobre un objeto de masa m moviéndose con velocidad $\vec{v}$ en un marco de referncia que rota con frecuencia angular $\vec{\omega}_{ss}$constante es

$$\vec{F}_C = 2m\vec{v} \times \vec{\omega}_{ss} \ . \tag{2}$$

En términos de las cantidades escalares que se le permite usar

$$F_C = 2mv\omega_{ss} \sin\phi \ , \tag{3}$$

donde ϕ es el ángulo entre la velocidad y el eje de rotación. La fuerza es perpendicular tanto a la velocidad v como al eje de rotación. El signo de la fuerza se puede determinar por medio de la regla de la mano derecha, pero en lo que sigue lo puede escoger libremente.

B.6	Calcule la velocidad horizontal v_x y el desplazamiento horizontal d_x (relativo a la base de la torre y en dirección perpendicular a la torre) de la masa en el momento que golpea el suelo. Puede asumir que la altura H es pequeña, de modo que la aceleración medida por los astronautas es constante durante la caída. También puede asumir que $d_x \ll H$.	1.1pt

Para obtener un buen resultado, Alice decide llevar a cabo el experimento en una torre mucho más alta que la anterior. Para su sorpresa, la masa golpea el suelo justo en la base de la torre, tal que $d = 0$.

B.7	Encuentre el límite inferior para la altura de la torre para el cual puede ser $d_x = 0$.	1.3pt

Alice quiere intentar convencer a Bob una última vez. Ella quiere usar su oscilador de resorte para mostrar el efecto de la fuerza de Coriolis. Para este efecto, ella cambia el montaje original: ella cuelga el resorte de un anillo que puede deslizar libremente sobre una barra horizontal en la dirección x sin fricción. El resorte como tal oscila en la dirección y. La barra es paralela al suelo y perpendicular al eje de rotación de la estación espacial. El plano xy es por lo tanto perpendicular al eje de rotación, con la dirección y apuntando hacia el centro de rotación de la estación.

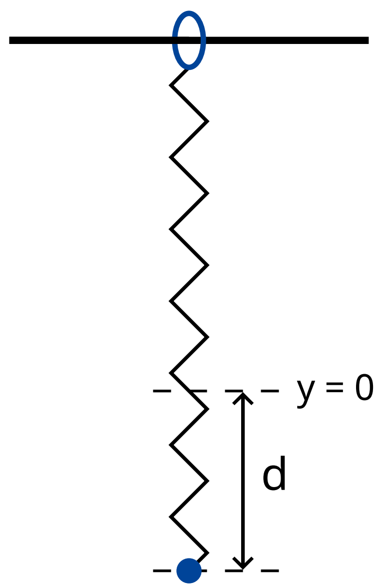

Figura 5: Montaje.

B.8 Alice jala la masa una distancia d hacia abajo con respecto al punto de equilibrio $x = 0$, $y = 0$, y luego la suelta (ver figura 5). 1.7pt

- Encuentre una expresión algebraica para $x(t)$ y $y(t)$. Puede asumir que $\omega_{ss} d$ es una cantidad pequeña y despreciar la fuerza de Coriolis para el movimiento a lo largo del eje ***y***.
- Dibuje la trayectoria $(x(t), y(t))$ marcando todas las características importantes tales como la amplitud.

Alice y Bob siguen discutiendo.