Dois problemas de Mecânica (10 pontos)

Por favor, leia as instruções gerais contidas no envelope separado antes de iniciar este problema.

Parte A. O disco escondido (3.5 pontos)

Considere um cilindro de madeira de raio r_1 e de espessura h_1. Em algum lugar no interior do cilindro de madeira, a madeira foi substituída por um disco de metal de raio r_2 e de espessura h_2. O disco de metal é colocado de tal modo que o seu eixo de simetria B é paralelo ao eixo de simetria S do cilindro de madeira, e é colocado à mesma distância a partir da face superior e da face inferior do cilindro. Denotamos a distância entre S e B por d . A densidade da madeira é ρ_1 e a densidade do metal é $\rho_2 > \rho_1$. A massa total do cilindro de madeira com o disco de metal dentro é M .

Nesta tarefa, o cilindro de madeira é posto no chão para que ele possa rolar livremente para a esquerda e para a direita. Veja Fig. 1 para uma vista lateral e uma vista superior da configuração.

A meta desta tarefa é determinar o tamanho e a posição do disco de metal.

Quando for pedido para expressar o resultado em termos de grandezas conhecidas, você pode sempre assumir que são conhecidas:

$$r_1,\ h_1,\ \rho_1,\ \rho_2, M\ . \tag{1}$$

A meta é determinar r_2, h_2 e d por meio de medições indiretas.

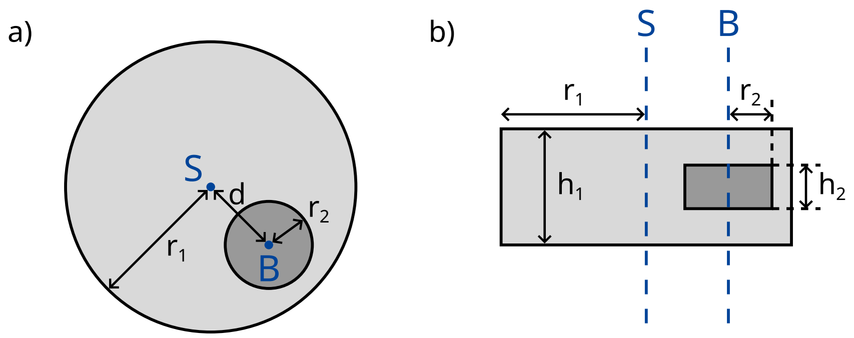
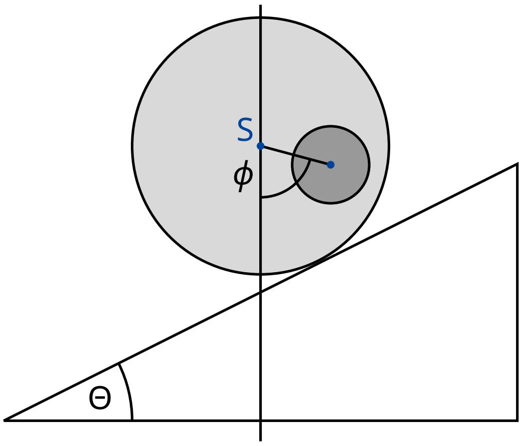


Figura 1: a) vista lateral b) vista superior

Vamos denotar b a distância entre o centro de massa C de todo o sistema e o eixo de simetria do S cilindro. Para determinar essa distância, nós projetamos a seguinte experiência: Nós colocamos o cilindro sobre uma base horizontal, de tal maneira que ele está num equilíbrio estável. Lentamente, a base é inclinada de um ângulo Θ (ver Fig. 2). Devido ao atrito estático, o cilindro pode rolar livremente sem deslizar. Para uma pequena inclinação ele rolará para baixo, mas irá parar em um equilíbrio estável depois de rodar um ângulo ϕ, o qual medimos.



Cilindro em um plano inclinado.

A.1	Determine a expressão para a distância b em função das grandezas (1), do ângulo ϕ e do ângulo de inclinação Θ do plano.	0.8pt

A partir de agora, nós podemos assumir que o valor b é conhecido.

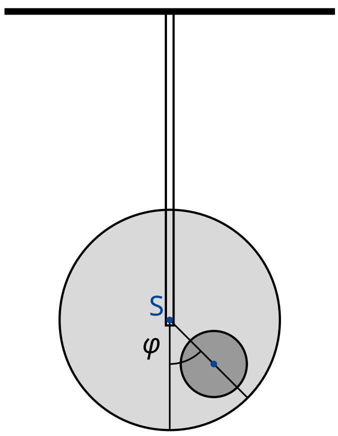


Figura 3: Cilindro suspenso.

Nesta parte do problema, nós queremos medir o momento de inércia I_S do sistema em relação ao eixo de simetria S. Portanto, o cilindro deve ser suspenso por uma haste rígida passando no seu eixo de simetria. Em seguida, ele é retirado de sua posição de equilíbrio por um pequeno ângulo ϕ, e depois é deixado livre. Veja a figura 3 para a configuração. Observa-se que o ângulo ϕ formado pelo cilindro descreve um movimento periódico com período T.

A.2	Encontre a equação de movimento descrito por ϕ ? Expresse o momento de inércia I_S do sistena em torno do seu eixo de simetria S em termos de T , b e das grandezas conhecidas (1). Você pode assumir que o sistema é levemente perturbado a partir da posição de equilíbrio e que o ângulo ϕ é muito pequeno.	0.5pt

Com base no que foi determinado nas questões A.1 e A.2, agora deseja-se determinar a geometria e a posição do disco de metal no interior do cilindro de madeira.

A.3	Determine a expressão para a distância d como uma função de b e das grandezas (1). Você também pode incluir r_2 e h_2 como variáveis em sua expressão, uma vez que serão calculadas no item **A.5.**	0.4pt

A.4	Determine a expressão para o momento de inercia I_S em termos de b e das grandezas (1). Você também pode incluir r_2 e h_2 como variáveis em sua expressão, uma vez que serão calculados no item **A.5.**	0.7pt

A.5	Usando todos os resultados acima, escreva uma expressão para h_2 e r_2 em termos de b, T e das grandezas (1). Você pode expressar h_2 em função de r_2.	1.1pt

Parte B. Estação espacial girando (6.5 pontos)

Alice é uma astronauta que vive numa estação espacial. A estação espacial é uma roda gigantesca de raio R girando em torno de seu eixo, proporcionando assim uma gravidade artificial para os astronautas. Os astronautas vivem no lado interno do aro da roda. A atração gravitacional da estação espacial e a curvatura do piso pode ser ignorado.

B.1	Com qual velocidade angular ω_{ss} a estação espacial deve girar de forma que os astronautas sintam a mesma aceleração gravitacional g_E da superfície da Terra?	0.5pt

Alice e seu amigo astronauta Bob têm uma discussão. Bob não acredita que vive de fato numa estação espacial e argumenta que eles estão na Terra. Alice quer provar para Bob que eles estão vivendo numa estação espacial girante utilizando conceitos de Física. Com esta finalidade, ela prende uma massa m a uma mola com constante elástica k e permite que ela oscile. A massa oscila somente na direção vertical, e não pode se mover na direção horizontal.

B.2	Assumindo que a gravidade na Terra é constante com aceleração g_E, qual seria a frequência angular de oscilação ω_E que uma pessoa na Terra mediria?	0.2pt

B.3	Qual a frequência de oscilação angular ω medida por Alice na estação espacial?	0.6pt

Alice está convencida de que seu experimento prova que eles estão numa estação espacial girante. Bob permanece cético. Ele argumenta que ao levar em consideração a mudança na aceleração da gravidade sobre a superfície da Terra, é possível obter o mesmo efeito. Nos itens seguintes iremos investigar se Bob está certo.

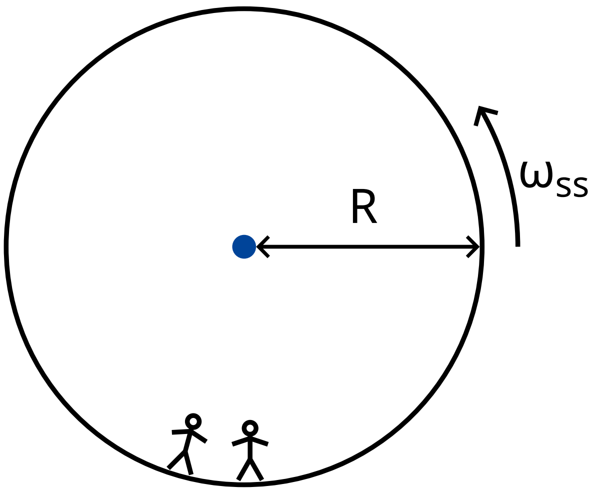


Figura 4: Estação espacial

B.4	Obtenha uma expressão para a gravidade $g_E(h)$ para pequenas altitudes h sobre a superfície da Terra e determine a frequência angular $\tilde{\omega}_E$ da massa oscilante (a aproximação linear é o suficiente). O raio da Terra é dado por R_E e despreze a rotação da Terra.	0.8pt

De fato, nesta estação espacial, Alice observa que o pêndulo de mola oscila com a frequência prevista por Bob.

B.5	Para qual raio R da estação espacial a frequência de oscilação ω é a mesma que a frequência de oscilação $\tilde{\omega}_E$ na superfície da Terra? Expresse sua resposta em termos de R_E.	0.3pt

Irritada com a teimosia de Bob, Alice propõe um experimento para provar seu ponto de vista. Para este fim, ela sobe em uma torre de altura H sobre o piso da estação espacial e deixa cair uma massa. Esta experiência pode ser entendida no referencial em rotação, bem como em um referencial inercial.

Em um referencial girando uniformemente, os astronautas sentem uma força ficticia $\vec{F}_C$ chamada de força de Coriollis. A força $\vec{F}_C$ que atua sobre uma massa m que se move a uma velocidade $\vec{v}$ num referencial em rotação com velocidade angular $\vec{\omega}_{ss}$ é dada por

$$\vec{F}_C = 2m\vec{v} \times \vec{\omega}_{ss} \, . \tag{2}$$

Em termos de quantidades escalares pode-se escrever

$$F_C = 2mv\omega_{ss} \sin\phi \, , \tag{3}$$

onde ϕ é o ângulo entre a velocidade e o eixo de rotação. A força é perpendicular à velocidade e ao eixo de rotação. O sinal da força pode ser determinado pela regra da mão direita, mas no que se segue você pode adotar como achar conveniente.

B.6	Calcule a velocidade horizontal $v_x v_x$ e o deslocamento horizontal d_x (em relação à base da torre, na direção perpendicular à torre) da massa no momento em que atinge o chão. Pode-se presumir que a altura H da torre é pequena, de modo que a aceleração medida pelos astronautas é constante durante a queda. Além disso, você pode assumir que $d_x \ll H$	1.1pt

Para obter um bom resultado, Alice decide conduzir este experimento de uma torre ainda mais alta que a anterior. Para sua surpresa, a massa atinge o solo exatamente sobre a base da torre, de forma que $d_x = 0$.

B.7	Encontre o valor mínimo para a altura da torre para a qual pode acontecer que $d_x = 0$.	1.3pt

Alice pretende fazer uma última tentativa para convencer Bob. Ela deseja usar seu pêndulo de mola para mostrar o efeito da força de Coriolis. Para isto, ela modifica seu experimento inicial: ela prende a mola a um anel que está colocado numa vareta horizontal e pode se mover livremente no eixo x. A mola oscila na direção y. A vareta está posicionada paralela ao solo e perpendicular ao eixo de rotação da estação espacial. O plano xy é, portanto, perpendicular ao eixo de rotação, com a direção y apontando diretamente para o centro de rotação da estação.

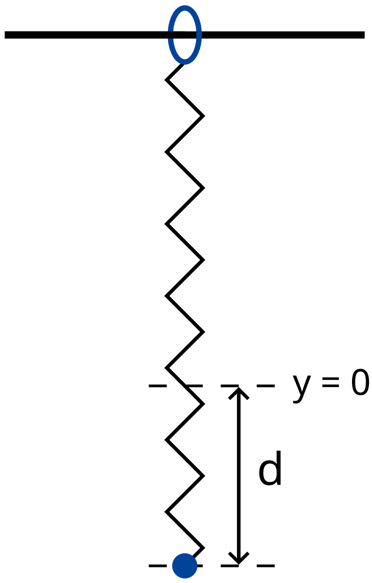


Figura 5: Arranjo experimental.

B.8	Alice puxa a massa uma distância d abaixo da posição de equilíbrio $x = 0$, $y = 0$, e deixa ela oscilar (veja a figura 5). • Dê uma expressão algébrica de $x(t)$ e $y(t)$. Você pode assumir que $\omega_{ss}.d$ é pequeno. Despreze a força de Coriolis para o movimento ao longo do eixo y. • Esboce uma trajetória $(x(t), y(t))$, indicando todas as características importantes como a amplitude.	1.7pt

Alice e Bob continuam a discussão.