Zwei Probleme in der Mechanik (10 Punkte)

Bevor Du mit dem Bearbeiten der Aufgabe beginnst, lies die allgemeinen Anweisungen in dem separaten Umschlag.

Aufgabenteil A: Die versteckte Scheibe (3,5 Punkte)

Betrachte einen soliden Holzzylinder mit Radius r_1 und Dicke h_1. Irgendwo in diesem Holzzylinder befindet sich eine ebenfalls zylinderförmige Metallscheibe mit Radius r_2 und Dicke h_2. Die Symmetrieachse B der Metallscheibe verläuft parallel zur Symmetrieachse S des Zylinders. Der Abstand zwischen S und B wird mit d bezeichnet. Der Abstand der Metallscheibe von der Ober- und Unterseite des Holzzylinders ist gleich groß. Die Dichte von Holz beträgt ρ_1 und die des Metalls ρ_2 mit $\rho_2 > \rho_1$. Die Gesamtmasse des Holzzylinders mit der Metallscheibe beträgt M.

In der Aufgabe wird der Holzzylinder so auf den Boden gestellt, dass er frei nach rechts oder links rollen kann. Vgl. Abb. 1 für eine seitliche Ansicht und eine Ansicht von oben.

Das Ziel dieser Aufgabe ist die Bestimmung der Größe und der Position der Metallscheibe.

Für alle weiteren Überlegungen können die folgenden Größen als bekannt angenommen werden:

$$r_1,\ h_1,\ \rho_1,\ \rho_2, M\ . \tag{1}$$

Das Ziel der Aufgabe ist die Bestimmung von r_2, h_2 und d durch indirekte Messungen.

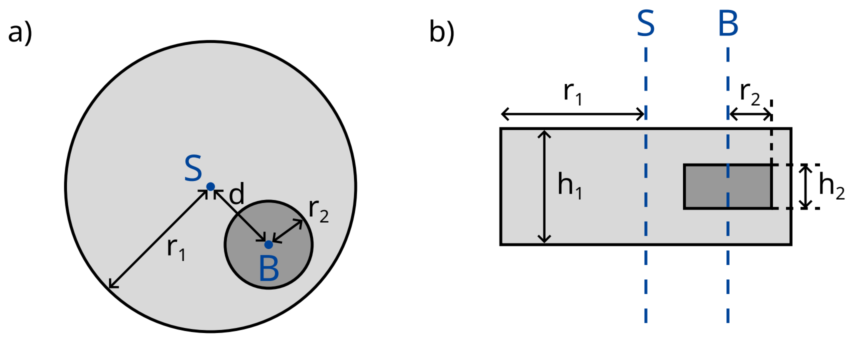

Abbildung 1: Ansicht des aufgestellten Zylinders mit der Metallscheibe a) von der Seite und b) von oben.

Wir bezeichnen mit b den Abstand zwischen dem Schwerpunkt C des Gesamtsystems und der Symmetrieachse S des Holzzylinders. Um diesen Abstand zu Bestimmen führen wir das folgende Experiment durch: Der Zylinder wird auf eine horizontale Unterlage gestellt, so dass er sich im stabilen Gleichgewicht befindet. Dann wird die Unterlage auf einer Seite vorsichtig angehoben, bis sie einen Winkel Θ mit der Horizontalen einschließt (vgl. Abb. 2). Aufgrund der Haftreibung kann der Zylinder frei rollen, jedoch nicht rutschen. Der Zylinder wird auf der schiefen Ebene ein wenig herunterrollen, bevor er wieder ein stabiles Gleichgewicht erreicht. Die Rotation um den Winkel ϕ gegenüber der Ausgangslage wird gemessen.

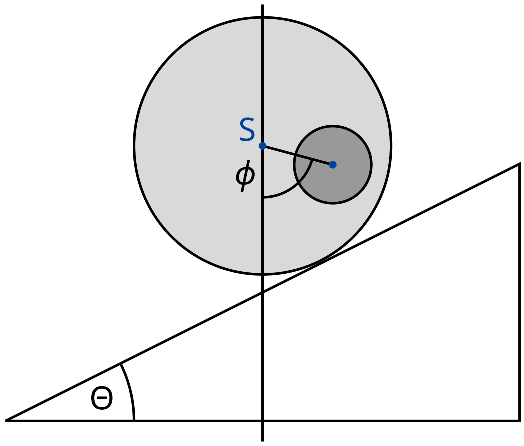

Abbildung 2: Zylinder auf einer geneigten Unterlage.

A.1	Bestimme einen Ausdruck für b in Abhängigkeit von den in (1) gegebenen Grössen, des Rotationswinkels ϕ und des Neigungswinkels Θ der Unterlage .	0.8pt

Ab hier kannst Du die Grösse b als bekannt voraussetzen.

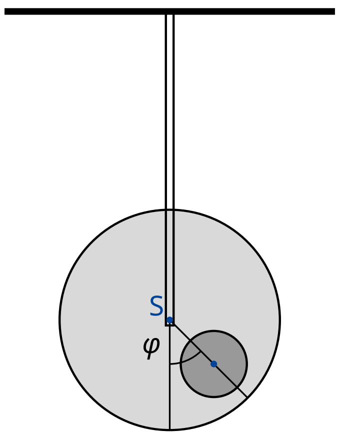

Abbildung 3: Aufhängung des Zylinder.

Als nächstes wird das Trägheitsmoment I_S des Systems bezogen auf die Symmetrieachse S bestimmt. Hierzu wird der Holzzylinder mit einer starren Stange an seiner Symmetrieachse aufgehängt und aus der sich einstellenden Ruheposition um einen kleinen Winkel φ herausgedreht. Abbildung 3 zeigt den experimentellen Aufbau. Anschließend wird der Zylinder losgelassen. Der Winkel φ ändert sich daraufhin periodisch mit einer Periodendauer T.

A.2	Bestimme die Bewegungsgleichung für φ. Drücke das Trägheitsmoment I_S des Zylinders bezüglich der Symmetrieachse S in Abhängigkeit von T, b und den bekannten Größen (1) aus. Dabei kannst Du annehmen, dass die Abweichung aus der Gleichgewichtslage sehr klein bleibt, sodass auch φ immer sehr klein bleibt.	0.5pt

Mit den Ergebnissen der Messungen aus **A.1** und **A.2** kannst Du nun die Geometrie und die Position der Metallscheibe in dem Zylinder bestimmen.

A.3	Finde einen Ausdruck für den Abstand d als Funktion von b und den aus (1) bekannten Größen. Dabei kannst Du r_2 and h_2 als Variablen in dem Ausdruck benutzen. Diese werden in Aufgabe **A.5** berechnet.	0.4pt

A.4	Finde einen Ausdruck für das Trägheitsmoment I_S in Abhängigkeit von b und den aus (1) bekannten Größen. Du kannst dabei wieder r_2 and h_2 als Variablen in dem Ausdruck benutzen. Diese werden in Aufgabe **A.5** berechnet.	0.7pt

A.5	Benutze nun alle obigen Ergebnisse und bestimme Ausdrücke für h_2 und r_2 in Abhängigkeit von b, T und den aus (1) bekannten Größen. Dabei kannst Du h_2 als Funktion von r_2 ausdrücken.	1.1pt

Aufgabenteil B. Rotierende Raumstation (6,5 Punkte)

Alice ist eine Astronautin und lebt auf einer Raumstation. Die Station hat die Form eines riesigen Rades mit Radius R. Um eine künstliche Gravitation zu erzeugen, rotiert die Station um ihre Achse. Die Astronauten leben dabei auf der Innenseite des Randes des Rades. Die gravitative Anziehungskraft der Raumstation und die Krümmung des Bodens können vernachlässigt werden.

B.1	Mit welcher Kreisfrequenz ω_{ss} muss die Raumstation rotieren, damit die Astronauten die gleiche Gravitation g_E wie auf der Erdoberfläche erfahren?	0.5pt

Alice und ihr Astronautenkollege Bob haben eine Diskussion. Bob glaubt nicht daran, dass die beiden auf einer Raumstation leben, sondern behauptet, dass sie sich auf der Erde befinden. Alice will Bob physikalisch beweisen, dass sie doch auf einer Raumstation leben. Dazu befestigt sie eine Masse m an einer Feder mit Federkonstanten k und lässt diese schwingen. Die Masse sich kann dabei nur in vertikaler und nicht in horizontaler Richtung bewegen.

B.2	Welche Winkelfrequenz ω_E würde man für die Schwingung auf der Erde unter der Annahme einer konstanten Schwerebeschleunigung g_E messen?	0.2pt

B.3	Welche Winkelfrequenz ω misst Alice auf der Raumstation?	0.6pt

Alice ist überzeugt, dass ihr Experiment beweist, dass sie sich auf einer Raumstation befinden. Bob bleibt jedoch skeptisch. Er behauptet, dass man einen ähnlichen Effekt auch auf der Erde findet, wenn man die Variation der Erdanziehungskraft über der Erdoberfläche berücksichtigt. In den folgenden Aufgaben sollst Du herausfinden, ob Bob recht hat.

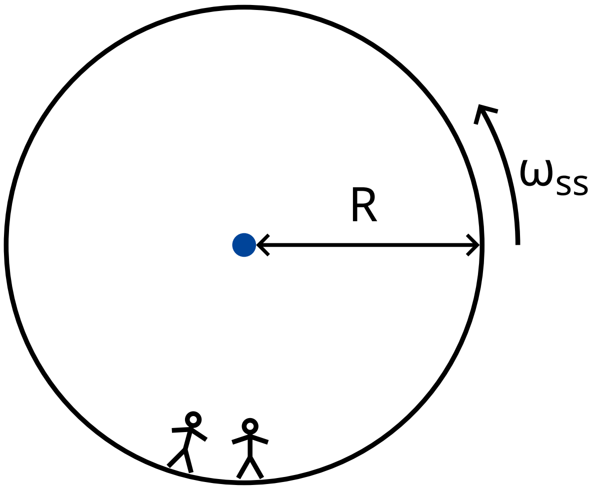

Abbildung 4: Raumstation.

B.4	Leite einen Ausdruck für die Erdbeschleunigung $g_E(h)$ in einer kleinen Höhe h über der Erdoberfläche her und berechne die daraus resultierende Winkelfrequenz $\tilde{\omega}_E$ für die schwingende Masse (eine lineare Näherung ist ausreichend). Der Radius der Erde beträgt R_E. Vernachlässige dabei die Rotation der Erde	0.8pt

Tatsächlich stellt Alice fest, dass ihr Pendel auf der Raumstation mit der von Bob vorhergesagten Frequenz oszilliert.

B.5	Für welchen Radius R der Raumstation stimmt die Winkelfrequenz ω auf der Raumstation mit der auf der Erde $\tilde{\omega}_E$ überein? Drücke Deine Antwort durch R_E aus.	0.3pt

Genervt von Bobs Starrköpfigkeit entwirft Alice ein Experiment, um ihren Standpunkt zu beweisen. Hierzu steigt sie auf einen Turm der Höhe H über dem Boden der Raumstation und lässt von dort eine Masse fallen. Das Experiment kann sowohl im rotierenden Bezugsystem als auch in einem Inertialsystem analysiert werden.

In einem gleichmäßig rotierenden Bezugsystem erfahren die Astronauten eine Scheinkraft, die so genannte Corioliskraft $\vec{F}_C$. Die auf einen Gegenstand der Masse m, der sich mit einer Geschwindigkeit $\vec{v}$ in einem mit konstanter Winkelfrequenz $\vec{\omega}_{ss}$ fortbewegt, wirkende Kraft $\vec{F}_C$ ist gegeben durch

$$\vec{F}_C = 2m\vec{v} \times \vec{\omega}_{ss} \,. \tag{2}$$

Der Betrag der Kraft ist

$$F_C = 2mv\omega_{ss} \sin\phi \,, \tag{3}$$

wobei ϕ der Winkel zwischen der Geschwindigkeit der Masse und der Rotationsachse ist. Die Kraft wirkt in eine Richtung senkrecht zur Geschwindigkeit sowie zur Rotationsachse. Das Vorzeichen der Kraft kann durch die Rechte-Hand-Regel bestimmt werden. Du kannst es aber im Folgenden beliebig wählen.

B.6	Berechne die Horizontalgeschwindigkeit v_x und die horizontale Verschiebung d_x (in Bezug auf das Fundament des Turmes, in senkrechter Richtung zum Turm) der Masse, wenn sie den Boden erreicht. Nimm an, dass die Höhe H des Turmes klein ist, so dass die Beschleunigung, welche die Astronauten messen, während dem Fall konstant ist. Nimm zusätzlich an, dass $d_x \ll H$.	1.1pt

Um ein gutes Ergebniss zu erhalten, entscheidet sich Alice dazu, das Experiment von einem viel größeren Turm als zuvor durchzuführen. Zu ihrer Verwunderung trifft die Masse jedoch genau am Fundament des Turms auf, so dass $d \; = 0$.

B.7	Finde eine untere Grenze für die Turmhöhe, so dass $d_x = 0$ passiert.	1.3pt

Alice möchte einen letzten Versuch wagen, um Bob zu überzeugen. Sie benutzt ihren Federschwinger, um den Corioliseffekt zu zeigen. Dazu wird der ursprüngliche Aufbau folgendermaßen abgeändert: Die Feder wird an einen Ring angebracht, der reibungsfrei an einem horizontalen Stab in x-Richtung gleiten kann. Die Feder schwingt in y-Richtung. Der Stab befindet sich parallel zum Boden und im rechten Winkel zu der Rotationsachse der Raumstation. Die $x-y$-Ebene ist daher senkrecht zur Rotationsachse, wobei y in die Richtung des Rotationszentrums des Raumschiffs zeigt.

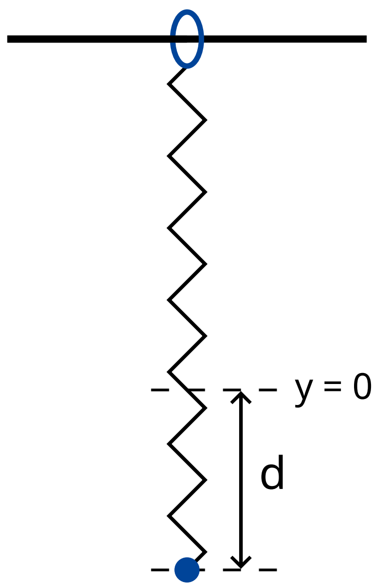

Abbildung 5: Aufbau.

B.8	Alice lenkt die Masse eine Strecke d aus dem Gleichgewicht bei $x = 0$, $y = 0$ aus, und lässt sie dann los (vgl. Abb. 5). • Bestimme einen algebraischen Ausdruck für $x(t)$ und $y(t)$. Hierfür kannst Du annehmen, dass $\omega_{ss} d$ klein ist. Vernachlässige zudem die Corioliskraft für eine Bewegung entlang der y-Achse • Skizziere die Bahn $(x(t), y(t))$. Markiere dabei alle wichtigen Größen wie z.B. die Amplitude.	1.7pt

Alice und Bob diskutieren weiter.