

两个力学问题 (10 分)

开始做题之前，请仔细阅读另外一个信封中的理论考试指南。

A 部分. 隐藏的盘子 (3.5 分)

一个半径为 r_1 、厚度为 h_1 的实心木质圆柱体，在其内部挖一个孔，以固定一个半径为 r_2 、厚度为 h_2 的圆柱形金属盘。金属盘的对称轴为 B ，木质圆柱体的对称轴为 S ，二轴互相平行，其距离为 d ；金属盘与木质圆柱体的上下两底面的距离相等。木质圆柱体的密度为 ρ_1 ，金属盘的密度 $\rho_2 > \rho_1$ 。木质圆柱体与金属盘的总质量为 M 。

在此问中，将木质圆柱如图 1 所示放置在地面上，木质圆柱可以左右自由滚动。图 1 分别为侧视图与俯视图。

本小题的目标是：求出金属盘的尺寸 r_2 和 h_2 以及在木质圆柱中的位置 d 。

在下面的各问题中，当要求用已知物理量表示计算结果时，始终假定以下几个参量是已知的：

$$r_1, h_1, \rho_1, \rho_2, M. \quad (1)$$

本小题目标是：通过非接触测量，求出金属盘的尺寸 r_2 和 h_2 以及在木质圆柱中的位置 d 。

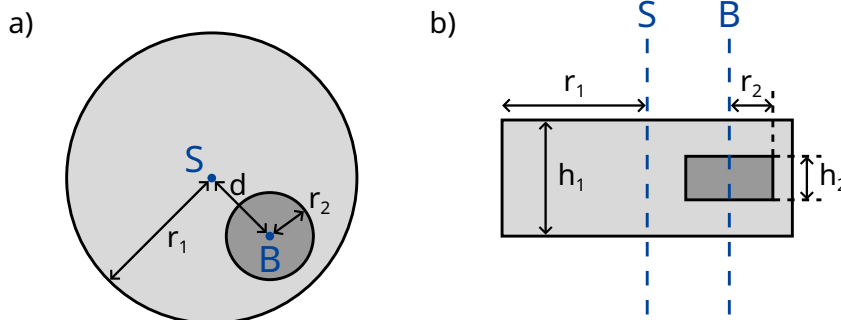


图 1: a) 侧视图; b) 俯视图

b 为整个系统的质心 C 与木质圆柱对称轴 S 之间的距离。为确定 b ，我们设计了如下实验：将系统放置在一个水平基座上，呈稳定平衡状态。缓慢倾斜基座使之与地面成 θ 角 (见图 2)。由于静摩擦力，圆柱与斜面间没有滑动，而只有自由滚动。当圆柱沿斜面滚动一小段距离后，再次进入一个稳定平衡的静止状态，测得再次平衡时圆柱转过的角度为 ϕ 。

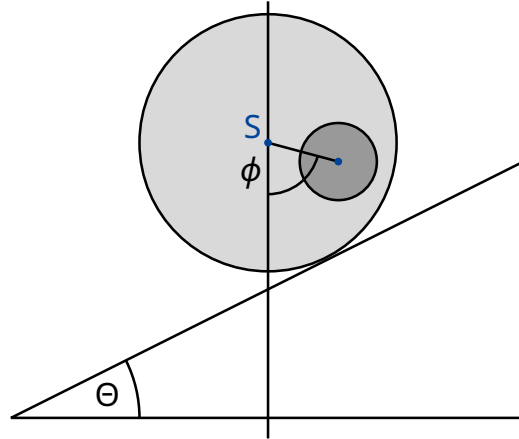


图 2. 倾斜的基座及圆柱

A.1 求出 b 的表达式, 用 (1) 中的某参量以及 ϕ 和 θ 表示。

0.8pt

后面的问题中, 我们可以假定 b 为已知。

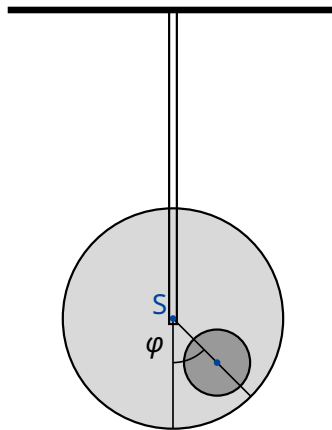


图 3. 悬挂的圆柱。

接下来, 我们想测量系统关于 S 轴的转动惯量 I_S 。为此, 使用硬杆固定 S 轴将圆柱悬挂起来, 然后使之相对于平衡位置转过一个小角度并释放, 如图 3 所示。可以看到系统转角 φ 作周期运动, 周期为 T 。

A.2 求出 φ 的运动学方程, 指出 φ 做何种方式运动? 求出系统关于轴 S 的转动惯量 I_S , 用 T, b 和 (1) 中的某一已知参量等表示, 推导中假定 φ 是很小的小量。 0.5pt

通过问题 **A.1** 和 **A.2** 的测量, 我们现在来进一步确定金属盘的几何尺寸及其在木质圆柱中的位置 d 。

A.3 求出 d 的表达式, 用 b 和 (1) 中的某些已知参量等表示。表达式中还要包含变量 r_2 和 h_2 , 这两个变量将在问题 **A.5** 中进行计算。 0.4pt

A.4 求出转动惯量 I_S 的表达式, 用 b 和 (1) 中的所有已知参量等表示。表达式中还要包含变量 r_2 和 h_2 , 这将在问题 **A.5** 中进行计算。 0.7pt

A.5 用以上那些结果, 求出 r_2 和 h_2 的表达式, 用 b, T 和 (1) 中已知的参量表示。为书写简单, 你可以在 h_2 的表达式中包含 r_2 。 1.1pt

B 部分. 旋转的空间站 (6.5 分)

爱丽丝是一个住在空间站的宇航员。空间站是个半径为 R 的巨大转轮, 转轮绕其自身中轴旋转, 由此为宇航员提供了一个人造的重力。宇航员生活在转轮的内部边缘处。空间站质量很轻, 万有引力可忽略; 空间站地面的曲率可忽略。

B.1 空间站以多大角频率 ω_{ss} 旋转, 可以使宇航员感受到与在地面相同的重力加速度 g_E ? 0.5pt

爱丽丝和她的宇航员朋友鲍勃发生争论。鲍勃不相信他们实际生活在空间站, 而是生活在地球。爱丽丝想用物理证明给 Bob 他们确实生活在旋转的空间站。于是, 她将质量为 m 的物体挂在弹性系数为 k 的弹簧上, 并让其振动。重物只在垂直方向振动, 而在水平方向上无运动。

B.2 假设是在地球上实验, 重力加速度 g_E 是恒定的, 地球上的人可测得上述振动的角频率 ω_E 为多大? 0.2pt

B.3 爱丽丝在空间站做实验, 测得的角频率 ω 为多大? 0.6pt

爱丽丝确信她的实验结果能够证明他们生活在一个旋转的空间站。但鲍勃仍保持怀疑, 他声称当考虑地球表面以外引力随空间的变化, 仍可得到类似现象。接下来我们探究为何鲍勃是对的。

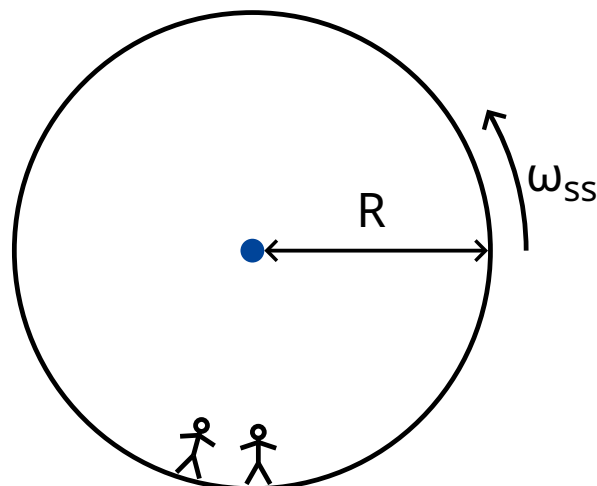


图 4. 空间站

B.4 推导地球表面附近高度 h 为小量处的重力加速度 $g_E(h)$ 的表达式并求出振动角频率 $\tilde{\omega}_E$ (线性近似足矣)。已知地球半径为 R_E 。忽略地球自转。 0.8pt

事实上, 爱丽丝确实发现对于该空间站, 弹簧振子的振动与鲍勃所指出的频率一致。

B.5 空间站的半径 R 为多大时, 空间站的振动角频率 ω 和地球上的 $\tilde{\omega}_E$ 相一致? 结果用 R_E 表示。 0.3pt

被鲍勃的顽固所激怒, 爱丽丝想到了一个实验来证明她的观点。为此她爬到距空间站地面高为 H 的塔顶并下落了一个物体。这个实验可以理解为在一转动参照系中, 也可以理解为在一惯性参照系中进行。

在一匀速转动参照系中, 宇航员会感受到一个称作科里奥利力的力 \vec{F}_C 。在角速度为 $\vec{\omega}_{ss}$ 转动参照系中, 作用于质量为 m , 以速度 \vec{v} 运动的物体上的科里奥利力 \vec{F}_C 表示为:

$$\vec{F}_C = 2m\vec{v} \times \vec{\omega}_{ss}. \quad (2)$$

也可以用标量表示为:

$$F_C = 2m\omega_{ss} \sin \phi, \quad (3)$$

式中 ϕ 为速度与旋转轴之间的夹角, 科里奥利力的方向与速度 v 和转轴都垂直。力的方向由右手定则确定。

B.6 计算物体落到地面时的水平方向速度 v_x 和水平方向上的位移 d_x (相对于塔基, 在垂直于塔的方向上的位移), 假定 H 较小, 能够保证整个下落过程中加速度不变, 并假定 $d_x \ll H$ 。 1.1pt

为得到一个更好的结果, 爱丽丝决定在一个更高的塔实施实验, 让她惊奇的是, 这一次重物竟然落在了塔基处, 即 $d_x = 0$ 。

B.7 求出发生上述现象 (即 $d_x = 0$) 时塔的最小高度。 1.3pt

爱丽丝想为说服鲍勃做最后努力。她想用她的弹簧振子演示科里奥利力的效应。于是她改变了原来的实验装置: 她将弹簧挂在一个环上, 环可以在沿 x 方向的水平杆上无摩擦自由滑动。弹簧本身在 y 方向振动。杆平行于空间站地面, 垂直于空间站转轴, xy 平面垂直于空间站转轴, y 方向指向空间站转动中心。

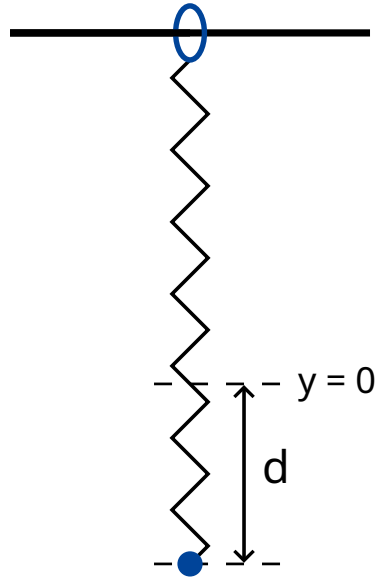


图 5. 装置

- B.8** 爱丽丝向下方拉动重物离开平衡点（平衡点坐标为 $x = 0, y = 0$ ）距离为 d ，然后释放（见图 5）。 1.7pt
- 求出 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的数学表达式，可假定 $\omega_{ss}d$ 较小，并忽略运动引起的 y 方向上科里奥利力。
 - 画出运动轨迹 $(x(t), y(t))$ 。标示出所有重要特征，如振幅等。