Dos Problemas en Mecánica (10 puntos)

Por favor asegúrese de leer las instrucciones generales dentro del sobre adjunto antes de comenzar a resolver este problema.

Parte A. El Disco Escondido (3.5 puntos)

Consideramos un cilindro sólido de madera de radio r_1 y grosor h_1. En algún lugar dentro del cilindro de madera, la madera se reemplazado por un disco de metal de radio r_2 y grosor h_2. El disco de metal está ubicado de tal forma que su eje de simetría B se ubica paralelo al eje de simetría S del cilindro de madera. El disco de metal se coloca a la misma distancia de la cara superior y la parte inferior del cilindro. La distancia entre S y B es d. La densidad de la madera es ρ_1, mientras que de la del metal es $\rho_2 > \rho_1$. La masa total del cilindro de madera y el disco adentro es M.

En esta tarea ubicamos el cilindro de madera sobre una base horizontal de tal forma que pueda rodar libremente hacia la izquierda y la derecha. Vea la Figura 1 para una vista lateral y superior del montaje.

El objetivo de la tarea es determinar el tamaño y posición del disco de metal.

En lo que sigue, cuando se le pida expresar el resultado en términos de cantidades conocidas puede asumir que las cantidades conocidas son:

$$r_1,\ h_1,\ \rho_1,\ \rho_2, M\ . \tag{1}$$

El objetivo es determinar r_2, h_2 y d, a través de mediciones indirectas.

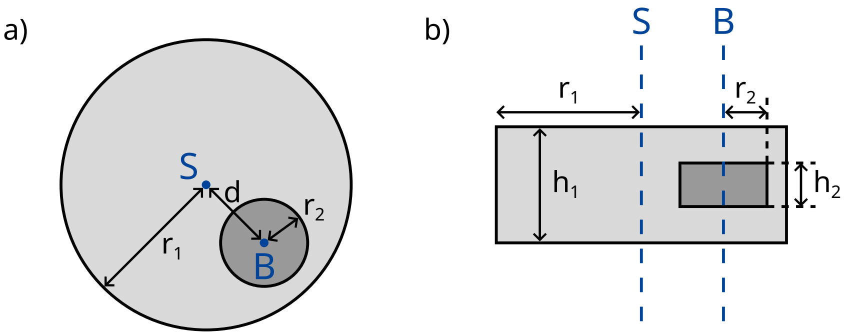

Figura 1: a) vista lateral b) vista superior.

b es la distancia entre el centro de masa C de todo el sistema y el eje de simetría S del cilindro de madera. Para determinar esta distancia, diseñamos el siguiente experimento: ubicamos el cilindro de madera sobre una base horizontal de manera que se halle en equilibrio estable. Ahora inclinamos la base lentamente hasta formar un ángulo Θ con la horizontal (ver Fig. 2). Debido a la fricción estática el cilindro de madera ha rodado sin deslizar, para detenerse en un punto de equilibrio estable formando el ángulo ϕ que se muestra y el cual se puede medir.

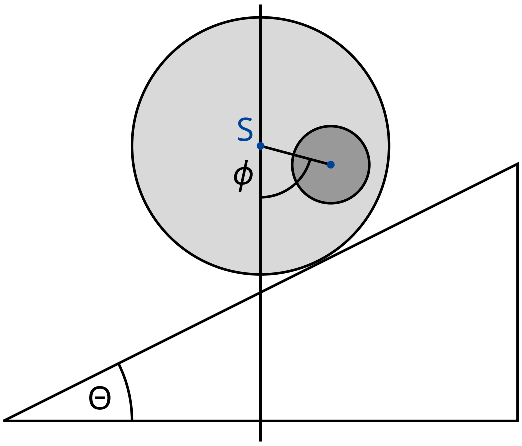

Figura 2: Cilindro sobre base inclinada.

A.1	Encuentre una expresión para b como función de las cantidades (1), el ángulo ϕ y el ángulo de inclinación de la base Θ .	0.8pt

Desde ahora asumiremos que el valor de b es conocido.

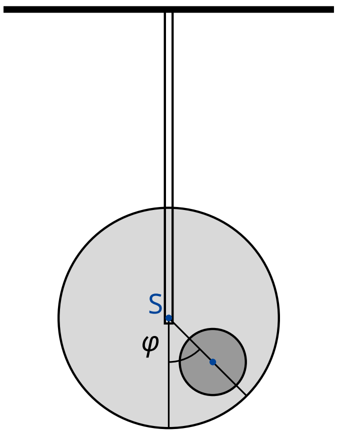

Figura 3: Sistema suspendido

A continuación queremos medir el momento de inercia I_S del sistema con respecto al eje de simetría S. Con este objetivo suspendemos el cilindro de madera por su eje de simetría de una vara rígida. Luego lo giramos ligeramente de su posición de equilibrio en un ángulo φ y lo soltamos. Vea la figura 3 para el montaje. Encontramos que φ describe un movimiento periódico con período T.

A.2	Encuentre la ecuación de movimiento para φ. Exprese el momento de inercia I_S del sistema alrededor de su eje de simetría S en términos de T, b y las cantidades conocidas (1). Puede asumir que solo perturbamos el equilibrio ligeramente, de tal forma que φ siempre es pequeño.	0.5pt

Partiendo de las mediciones de las preguntas **A.1** y **A.2**, queremos determinar la geometría y la posición del disco de metal dentro del cilindro de madera.

A.3	Encuentre una expresión para la distancia d como función de b y las cantidades (1). También puede incluir r_2 y h_2 como variables en su expresión, ya que se calculan en la subtarea **A.5**.	0.4pt

A.4	Encuentre una expresión para el momento de inercia I_S en términos de b y las cantidades conocidas (1). También puede incluir r_2 y h_2 como variables en su expresión, ya que se calculan en la subtarea **A.5**.	0.7pt

A.5	Usando todos los resultados anteriores, escriba una expresión para h_2 y $r_2$en términos de b, T y las cantidades (1). Puede expresar h_2 en función de r_2.	1.1pt

Parte B. Estación espacial en rotación (6.5 puntos)

Alice es una astronauta que vive en una estación espacial. La estación espacial es una rueda gigante de radio R rotando alrededor de su eje de tal forma que provee gravedad artificial para los astronautas. Los astronautas sobre el lado interior de la rueda. La atracción gravitacional de la estación espacial y la curvatura del piso son despreciables.

B.1	¿A qué frecuencia angular ω_{ss} debe rotar la estación espacial para que los astronautas perciban la misma aceleración gravitacional g_E que en la superficie de la tierra?	0.5pt

Alice y su amigo astronauta Bob tienen un desacuerdo. Bob no cree que en realidad estén viviendo en una estación espacial sino en la Tierra. Alice quiere probarle a Bob, usando física, que en realidad viven en una estación espacial rotando. Con este objetivo, Alice ata una masa m a un resorte de constante elástica k y la pone a oscilar. La masa oscila solo en la dirección vertical y no se puede mover en la dirección horizontal.

B.2	Sabiendo que la aceleración gravitacional sobre la Tierra es constante con valor g_E, ¿cuál es la frecuencia angular de oscilación ω_E de esa masa sujeta a ese resorte sobre la superfice de la Tierra?	0.2pt

B.3	¿En la estación espacial qué frecuencia angular de oscilación ω mide Alice?	0.6pt

Alice esta convencida de que su experimento comprueba que se encuentran en una estación espacial que está rotando. Bob lo sigue dudando. El asegura que al tomar en cuenta el cambio de la gravedad con la altura sobre la superficie de la Tierra, se encuentra un efecto similar. En las siguientes tareas investigamos si Bob tiene razón.

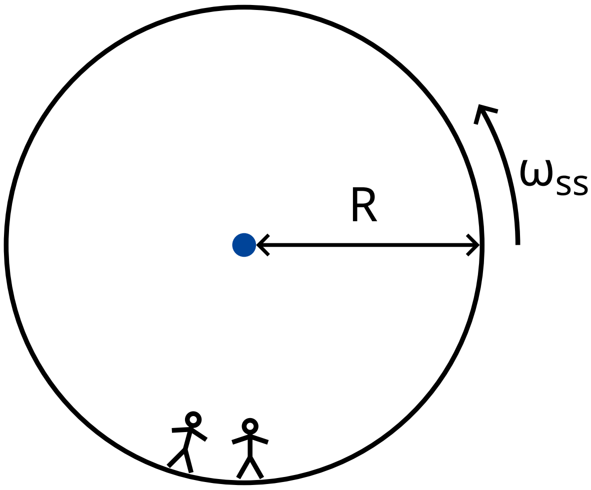

Figura 4: Estación espacial

B.4	Halle una expresión para la gravedad $g_E(h)$ para alturas bajas en función de h sobre la superficie de la Tierra. Aproxime esa expresión para h pequeñas. Calcule la frecuencia de oscilación $\tilde{\omega}_E$ de la masa oscilante (una aproximación lineal es suficiente). Denote el radio de la Tierra como R_E. Desprecie la rotación de la Tierra.	0.8pt

En efecto en la estación espacial Alice encuentra que el resorte oscila con la frecuencia que Bob predijo.

B.5	¿Para qué radio R de la estación espacial es igual la frecuencia de oscilación ω a la frecuencia de oscilación $\tilde{\omega}_E$ sobre la tierra? Exprese su respuesta en términos de R_E.	0.3pt

Exasperada con la terquedad de Bob, a Alice se le ocurre la idea de utilizar un experimento para probar que tiene razón. Para esto, sube a una torre de altura H con respecto al piso de la estación espacial y suelta una masa. Este experimento se puede comprender tanto en el marco de referencia que está rotando, como en el marco de referencia inercial.

En un marco de referencia que está rotando uniformemente los astronautas perciben una fuerza $\vec{F}_C$, llamada la fuerza de Coriolis. Esta fuerza $\vec{F}_C$ actuando sobre un objeto de masa m moviéndose a una velocidad $\vec{v}$ en un marco de referencia que está rotando con frequencia angular constante $\vec{\omega}_{ss}$ está dada por

$$\vec{F}_C = 2m\vec{v} \times \vec{\omega}_{ss} \; . \tag{2}$$

En términos de las cantidades escalares que se le permite usar

$$F_C = 2mv\omega_{ss} \sin\phi \; , \tag{3}$$

donde ϕ es el ángulo entre la velocidad y el eje de rotación. La fuerza es perpendicular tanto a la velocidad v como al eje de rotación. El signo de la fuerza se puede determinar por medio de la regla de la mano derecha, pero en lo que sigue puede escoger libremente.

B.6	Calcule la velocidad horizontal v_x y el desplazamiento horizontal d_x (relativo a la base de la torre, en la dirección perpendicular a la torre) de la masa en el momento que impacta con el piso. Asuma que la altura H de la torre es pequeña, asi la aceleración medida por los astronautas es constante durante la caída. También puede asumir que $d_x \ll H$.	1.1pt

Para obtener un buen resultado, Alice decide llevar a acabo el experimento en una torre mucho más alta que la anterior. Para su sorpresa, la masa impacta el piso justo en la base de la torre, tal que $d_x = 0$.

B.7	Encuentre la mínima altura de la torre para que $d_x = 0$.	1.3pt

Alice quiere intentar convencer a Bob una vez más. Ella quiere usar su oscilador con resorte para mostrar el efecto de la fuerza de Coriolis. Para este efecto, ella cambia el montaje original: ella cuelga el resorte de un anillo que puede deslizar libremente sobre una vara horizontal en la dirección x sin fricción. El resorte como tal oscila en la dirección y. La vara se encuentra paralela al suelo y perpendicular al eje de rotación de la estación espacial. El plano xy es por lo tanto perpendicular al eje de rotación, con la dirección y apuntando hacia el centro de rotación de la estación.

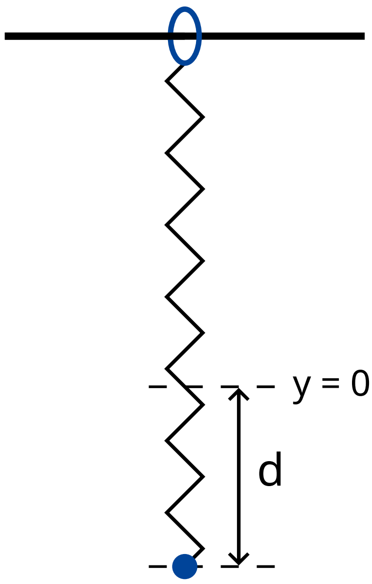

Figura 5: Montaje.

B.8	Alice hala la masa una distancia d hacia abajo con respecto al punto de equilibrio $x = 0$, $y = 0$, y luego la suelta (ver figura 5). • Encuentre una expresión algebraica para $x(t)$ y $y(t)$. Puede asumir que $\omega_{ss} d$ es pequeña y desprecie la fuerza de Coriolis para el movimiento sobre el eje y. • Dibuje la trayectoria $(x(t), y(t))$, marcando todas las características importantes tales como la amplitud.	1.7pt

Alice y Bob continúan discutiendo.