Δύο προβλήματα Μηχανικής (10 Μονάδες)

Σας παρακαλούμε να διαβάσετε προσεκτικά τις Γενικές Οδηγίες που υπάρχουν σε ξεχωριστό φάκελο πριν ξεκινήσετε να εργάζεστε στο πρόβλημα αυτό.

Μέρος A. Ο Κρυμμένος Δίσκος (3.5 Μονάδες)

Θεωρούμε ένα συμπαγή ξύλινο κύλινδρο ακτίνας r_1 και πάχους h_1. Κάπου στο εσωτερικό του, το ξύλο έχει αντικατασταθεί από ένα μεταλλικό δίσκο ακτίνας r_2 και πάχους h_2. Ο μεταλλικός δίσκος έχει τοποθετηθεί κατά τρόπο ώστε ο άξονας συμμετρίας του B να είναι παράλληλος με τον άξονα συμμετρίας S του ξύλινου κυλίνδρου και να ισαπέχει από την κορυφή και τη βάση του ξύλινου κυλίνδρου. Συμβολίζουμε την απόσταση μεταξύ των S και B με d. Η πυκνότητα του ξύλου είναι ρ_1 ενώ η πυκνότητα του μετάλλου είναι $\rho_2 > \rho_1$. Η συνολική μάζα των δύο σωμάτων είναι M.

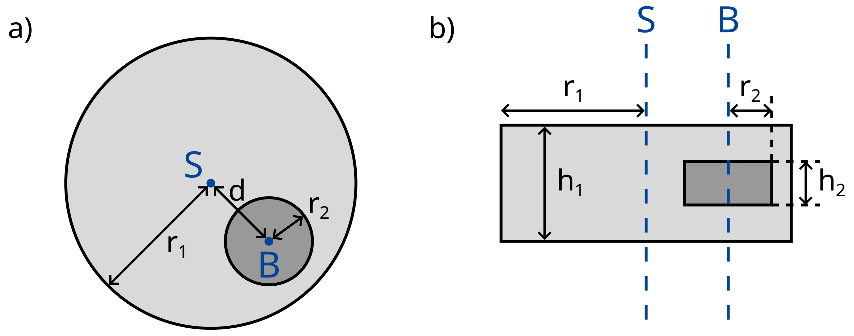
Στην άσκηση αυτή τοποθετούμε τον ξύλινο κύλινδρο στο έδαφος ώστε να μπορεί να κυλήσει ελεύθερα προς τα δεξιά ή τα αριστερά. Στην Εικ. 1 φαίνονται η πλευρική όψη και η κάτοψη της διάταξης.

Σκοπός του ερωτήματος αυτού είναι ο προσδιορισμός των διαστάσεων και της θέσης του μεταλλικού δίσκου.

Ακολούθως, όποτε σας ζητείται να εκφράσετε κάποιο αποτέλεσμα συναρτήσει γνωστών ποσοτήτων, μπορείτε να θεωρήσετε γνωστά τα ακόλουθα μεγέθη τα οποία θα αναφέρονται ως οι ποσότητες (1):

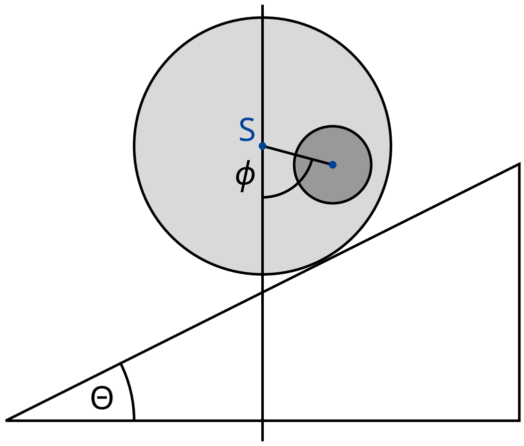
$$r_1,\ h_1,\ \rho_1,\ \rho_2, M\ . \tag{1}$$

Θα πρέπει να υπολογίσετε τα μεγέθη r_2, h_2 και d, εκτελώντας έμμεσες μετρήσεις.



Εικόνα 1: a) Πλάγια όψη b) Κάτοψη

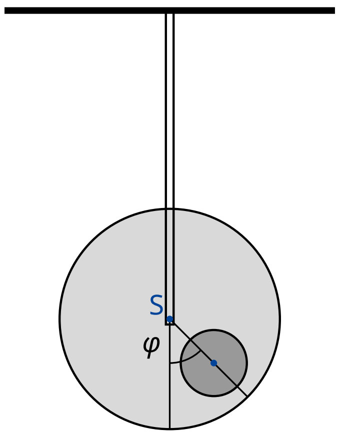
Συμβολίζουμε με b την απόσταση μεταξύ του κέντρου μάζας C του συστήματος σωμάτων και του άξονα συμμετρίας S του ξύλινου κυλίνδρου. Για να υπολογίσουμε την απόσταση αυτή, εκτελούμε το ακόλουθο πείραμα: Τοποθετούμε τον κύλινδρο σε οριζόντια βάση με τέτοιο τρόπο ώστε να βρίσκεται σε ευσταθή ισορροπία. Δίνουμε σταδιακά κλίση στη βάση (γωνία Θ με το οριζόντιο επίπεδο - βλ. Εικ. 2). Λόγω της στατικής τριβής ο κύλινδρος θα αρχίσει να κυλά ελεύθερα χωρίς να ολισθαίνει. Θα κυλήσει λίγο με κατεύθυνση τη βάση του κεκλιμένου επιπέδου και θα βρεθεί σε κατάσταση ευσταθούς ισορροπίας (οπότε θα σταματήσει) έχοντας διαγράψει μια γωνία ϕ την οποία μετράμε.



Εικόνα 2: Κύλινδρος σε κεκλιμένο επίπεδο.

A.1	Να εκφράσετε το b ως συνάρτηση των ποσοτήτων (1), της γωνίας ϕ και της γωνίας κλίσης Θ του κεκλιμένου επιπέδου.	0.8pt

Ακολούθως μπορείτε να θεωρείτε γνωστή την τιμή του b.



Εικόνα 3: Αναρτημένο σύστημα σωμάτων.

Στη συνέχεια επιθυμούμε να μετρήσουμε τη ροπή αδράνειας I_S του συστήματος ως προς τον άξονα συμμετρίας S. Για το σκοπό αυτό αναρτούμε τον ξύλινο κύλινδρο από τον άξονα συμμετρίας του στο άκρο άκαμπτης ράβδου. Στη συνέχεια τον εκτρέπουμε από τη θέση ισορροπίας του κατά μία μικρή γωνία ϕ και τον αφήνουμε ελεύθερο. Βλ. Εικ. 3 για την πειραματική διάταξη. Βρίσκουμε ότι η ϕ μεταβάλλεται περιοδικά με περίοδο T.

A.2	Να εξάγετε την εξίσωση της κίνησης για το ϕ. Να εκφράσετε τη ροπή αδράνειας I_S του συστήματος ως προς τον άξονα συμμετρίας του S, συναρτήσει των T, b και των ποσοτήτων (1). Μπορείτε να υποθέσετε ότι διαταράσσουμε την ισορροπία του ελάχιστα ώστε η γωνία ϕ να είναι πάντα πολύ μικρή.	0.5pt

Από τις μετρήσεις των ερωτήσεων **A.1** και **A.2**, επιθυμούμε να προσδιορίσουμε τις διαστάσεις και τη θέση του μεταλλικού δίσκου μέσα στον ξύλινο κύλινδρο.

A.3	Να εκφράσετε την απόσταση d συναρτήσει του b και των ποσοτήτων (1). Αν θέλετε, μπορείτε να συμπεριλάβετε τα r_2 και h_2 ως μεταβλητές της έκφρασης στην οποία θα καταλήξετε, δεδομένου ότι θα υπολογιστούν στο ερώτημα **A.5**.	0.4pt

A.4	Να εκφράσετε τη ροπής αδράνειας I_S συναρτήσει του b και των ποσοτήτων (1). Αν θέλετε, μπορείτε να συμπεριλάβετε τα r_2 και h_2 ως μεταβλητές της έκφρασης στην οποία θα καταλήξετε, δεδομένου ότι θα υπολογιστούν στο ερώτημα **A.5**.	0.7pt

A.5	Με βάση τα προηγούμενα αποτελέσματα, να γράψετε μια έκφραση για κάθε μία από τις ποσότητες h_2 και r_2 συναρτήσει των b, T και των ποσοτήτων (1). Μπορείτε να εκφράσετε το h_2 ως συνάρτηση του r_2.	1.1pt

Μέρος B. Περιστρεφόμενος Διαστημικός Σταθμός (6.5 Μονάδες)

Η Αλίκη (Alice) είναι αστροναύτης και ζει σε ένα διαστημικό σταθμό, ο οποίος είναι ένας γιγάντιος τροχός ακτίνας R που περιστρέφεται περί τον άξονά του, δημιουργώντας έτσι τεχνητή βαρύτητα για τους επιβάτες του. Οι αστροναύτες κατοικούν στην εσωτερική πλευρά της περιφέρειας του κυλίνδρου. Η βαρυτική έλξη του διαστημικού σταθμού και η καμπυλότητα του δαπέδου μπορούν να αγνοηθούν.

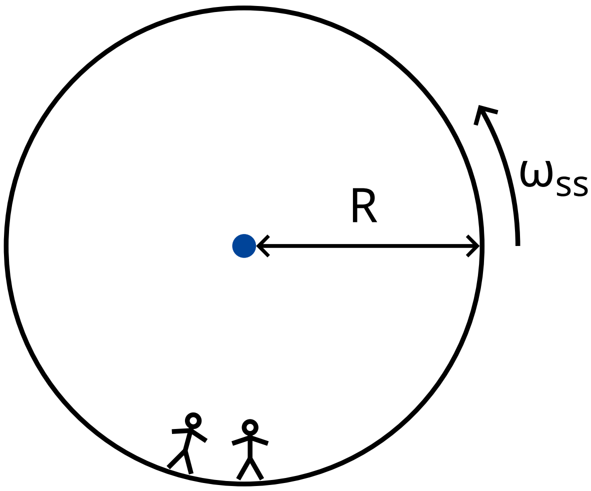
B.1	Να υπολογίσετε την κυκλική συχνότητα ω_{ss} με την οποία πρέπει να περιστρέφεται ο διαστημικός σταθμός, ώστε οι επιβάτες να βιώνουν επιτάχυνση της βαρύτητα ίδια με εκείνη που επικρατεί στην επιφάνεια της Γης, έστω g_E;.	0.5pt

Η Alice και ο φίλος της αστροναύτης Bob έχουν μια διαφωνία. Ο Bob δεν πιστεύει ότι ζουν πραγματικά σε ένα διαστημικό σταθμό και ισχυρίζεται ότι βρίσκονται στην επιφάνεια της Γης. Η Alice θέλει να αποδείξει στον Bob ότι ζουν σε ένα περιστρεφόμενο διαστημικό σταθμό, χρησιμοποιώντας επιχειρήματα Φυσικής. Για το σκοπό αυτό προσαρτά μια μάζα m σε ελατήριο σταθεράς k και θέτει το σύστημα σε ταλάντωση. Η μάζα ταλαντώνεται μόνο σε κατακόρυφη διεύθυνση και δε μπορεί να κινηθεί κατά τον οριζόντιο άξονα.

B.2	Υποθέτοντας ότι η γήινη βαρύτητα είναι σταθερή προκαλώντας επιτάχυνση g_E, πόση θα ήταν η γωνιακή συχνότητα ταλάντωσης ω_E αν η μετρηση γινόταν στην επιφανεια της Γης;	0.2pt

B.3	Πόση είναι η γωνιακή συχνότητα ταλάντωσης ω που μετρά η Alice;	0.6pt

Η Alice είναι σίγουρη ότι το πείραμά της αποδεικνύει πως βρίσκονται σε περιστρεφόμενο διαστημικό σταθμό. Ο Bob διατηρεί τις αμφιβολίες του. Ισχυρίζεται πως όταν λαμβάνουμε υπόψη τη μεταβολή της βαρύτητας σε συνάρτηση με το ύψος από την επιφάνεια της Γης, καταλήγουμε στα ίδια αποτελέσματα. Στη συνέχεια θα διερευνήσουμε αν ο Bob έχει δίκιο.



Εικονα 4: Διαστημικός σταθμός.

B.4	Να εκφράσετε την βαρύτητα $g_E(h)$ για μικρά ύψη h πάνω από την επιφάνεια της Γης και να υπολογίσετε τη γωνιακή συχνότητα $\tilde{\omega}_E$ της ταλαντούμενης μάζας (αρκεί μια γραμμική πρωτοβάθμια προσέγγιση). Η ακτίνα της Γης συμβολίζεται με R_E. Αγνοείστε την περιστροφή της Γης.	0.8pt

Πράγματι, για αυτόν τον διαστημικό σταθμό η Alice καταλήγει ότι το σύστημα ελατήριο-σώμα ταλαντώνεται με τη συχνότητα που προέβλεψε ο Bob.

B.5	Για ποια τιμή της ακτίνας R του διαστημικού σταθμού η συχνότητα ταλάντωσης ω συμπίπτει με την $\tilde{\omega}_E$ στην επιφάνεια της Γης; Να εκφράσετε την απαντησή σας ως συναρτηση της R_E	0.3pt

Εξοργισμένη με τον πεισματάρη Bob, η Alice επινοεί ένα πείραμα για να αποδείξει τον ισχυρισμό της. Έτσι, ανεβαίνει σε ένα πύργο ύψους H πάνω από το δάπεδο του διαστημικού σταθμού και αφήνει ένα σώμα να πέσει. Αυτό το πείραμα μπορεί να ερμηνευθεί τόσο σε ένα περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς όσο και σε ένα αδρανειακό.

Σε ένα ομαλά περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς, οι αστροναύτες αντιλαμβάνονται μια υποθετική (φανταστική) δύναμη $\vec{F}_C$ που ονομάζεται δύναμη Coriolis. Η δύναμη $\vec{F}_C$ που ασκείται σε σώμα μάζας m κινούμενο με ταχύτητα $\vec{v}$ σε ένα Σύστημα Αναφοράς που στρέφεται με σταθερή κυκλική συχνότητα $\vec{\omega}_{ss}$ δίνεται από τη σχέση

$$\vec{F}_C = 2m\vec{v} \times \vec{\omega}_{ss} \, . \tag{2}$$

Για το μέτρο της μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την έκφραση

$$F_C = 2mv\omega_{ss} \sin\phi \, , \tag{3}$$

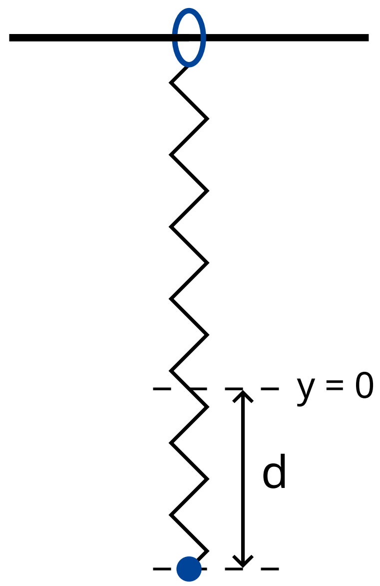
όπου ϕ είναι η γωνία μεταξύ της διεύθυνσης της ταχύτητας και του άξονα περιστροφής. Η δύναμη έχει διεύθυνση κάθετη, τόσο στην ταχύτητα v όσο και στον άξονα περιστροφής. Το πρόσημο της δύναμης προσδιορίζεται κανονικά από τον κανόνα του δεξιού χεριού, αλλά στη συνέχεια της άσκησης μπορείτε να το επιλέξετε ελεύθερα.

B.6	Να υπολογείσετε την οριζόντια ταχύτητα v_x και την οριζόντια μετατόπιση d_x (ως προς τη βαση του πύργου και καθέτως προς αυτόν) της μαζας τη στιγμή που χτυπά στο δάπεδο. Μπορείτε να υποθέσετε οτι το ύψος H του πύργου ειναι αρκούντως μικρό ώστε, η μετρούμενη επιτάχυνση από τους αστροναύτες κατά τη διάρκεια της πτώσης να είναι σταθερή. Επίσης μπορειτε να υποθέσετε ότι $d_x \ll H$	1.1pt

Για καλύτερα αποτελέσματα η Alice αποφασίζει να εκτελέσει το πείραμα αυτό από έναν πολύ ψηλότερο πύργο. Προς έκπληξή της, το σώμα φτάνει στο δάπεδο στη βάση του πύργου, δηλ. $d_x = 0$.

B.7	Να υπολογίσετε το ελαχιστο ύψος του πύργου για το οποίο θα μπορει να ισχυει $d_x = 0$.	1.3pt

Η Alice σκοπεύει να κάνει μια τελευταία προσπάθεια, ώστε να πείσει τον Bob. Θέλει να χρησιμοποιήσει τον ταλαντωτή ελατήριου-μάζας για να δείξει την επίδραση της δύναμης Coriolis. Προς το σκοπό αυτό τροποποιεί την αρχική πειραματική διάταξη: Συνδέει το ελατήριο σε ένα δαχτυλίδι το οποίο μπορεί να ολισθαίνει ελεύθερα σε μια οριζόντια ράβδο, κατά τη διεύθυνση x χωρίς τριβές. Το ελατήριο ταλαντώνεται κατά τη διεύθυνση y . Η ράβδος είναι παράλληλη στο έδαφος και κάθετη στον άξονα περιστροφής του διαστημικού σταθμού. Το επίπεδο xy είναι συνεπώς κάθετο στον άξονα περιστροφής, με τη διεύθυνση y να διέρχεται από το κέντρο περιστροφής του σταθμού.



Εικόνα 5: Πειραματική διάταξη.

B.8	Η Alice μετατοπίζει τη μάζα κατά μία απόσταση d χαμηλότερα από τη θέση ισορροπίας (το οποίο βρίσκεται στο σημείο $x = 0$, $y = 0$), και στη συνέχεια την αφήνει ελεύθερη (βλ. Εικ.5). • Να γράψετε μια αλγεβρική έκφραση των $x(t)$ και $y(t)$. Μπορείτε να υποθέσετε ότι η τιμή του γινομένου $\omega_{ss}d$ είναι μικρή και να αγνοήσετε τη δύναμη Coriolis για κίνηση κατά τον άξονα y • Σχεδιάστε την τροχιά $(x(t), y(t))$, σημειώνοντας όλα τα σημαντικά χαρακτηριστικά της, όπως το πλάτος.	1.7pt

Η Alice και ο Bob συνεχίζουν να διαφωνούν.