To mekanikopgaver (10 points)

Læs venligst den generelle vejledning i en anden konvolut inden du går i gang.

Del A. Den skjulte metalskive (3.5 points)

Vi betragter et sammensat legeme bestående af en cylindrisk skive af træ med radius r_1 og tykkelse h_1. Et sted inde i træcylinderen er der et hulrum som udfyldes helt af en cylindrisk metalskive med radius r_2 og tykkelse h_2. Metalskivens symmetriakse B er parallel med træcylinderens symmetriakse S , og metalskiven ligger midt i mellem oversiden og undersiden af træcylinderen. Vi betegner afstanden fra aksen S og aksen B med d. Densiteten af træ er ρ_1, og densiteten af metallet er $\rho_2 > \rho_1$. Massen af det sammensatte legeme er M.

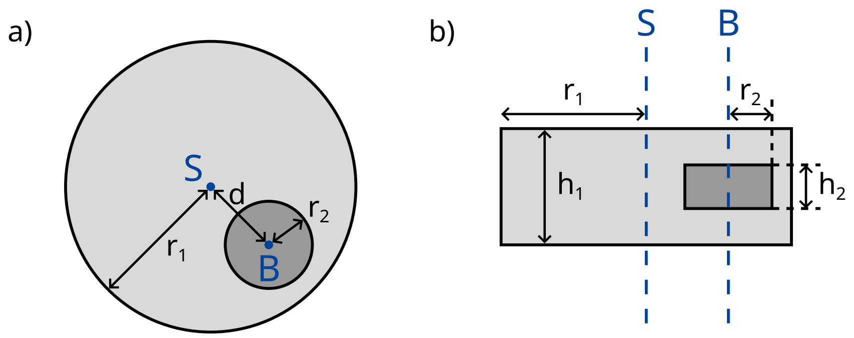
Legemet placeres på gulvet sådan at det kan rulle frit til højre og venstre. På figur 1 ses legemet fra siden samt oppefra.

Målet med denne del af opgaven er at bestemme størrelsen samt positionen af metalskiven.

Angiv dine svar med disse størrelser, som du kan antage er kendte

$$r_1,\ h_1,\ \rho_1,\ \rho_2,\ M. \tag{1}$$

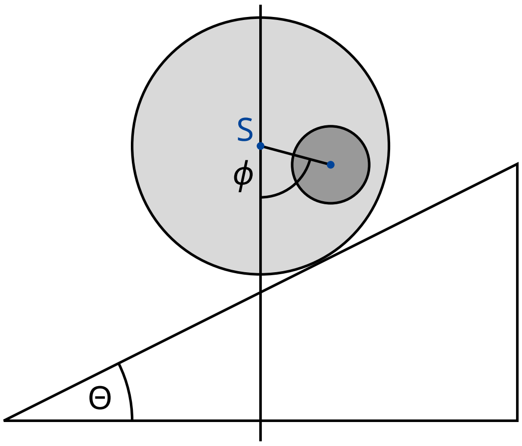
Målet er at bestemme r_2, h_2 og d, ved hjælp af indirekte målinger.



Figur 1: a) legemet set fra siden, b) legemet set ovenfra.

b er afstanden fra legemets massemidtpunkt C til legemets symmetriakse S . For at bestemme denne afstand, laves følgende forsøg: Underlagets hældning ændres nu langsomt så det danner vinklen Θ med vandret (se Fig. 2).

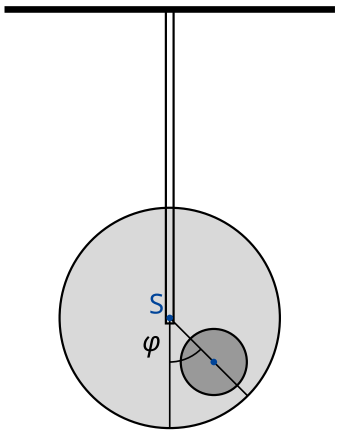
Den statiske friktion er tilstrækkelig til at legemet ikke glider, men ruller ud til en ny ligevægtsstilling efter at have roteret vinklen ϕ, som vi måler.



Figur 2: Legemet på skråplan.

A.1	Udtryk afstanden b som funktion af størrelserne (1), vinklen ϕ og hældningsvinklen Θ af skråplanet.	0.8pt

I det følgende vil vi antage at b er en kendt størrelse.



Figur 3: Legemet ophængt med fastspændt akse.

Vi ønsker nu at måle legemets inertimoment I_S med hensyn til symmetriaksen S. Legemets symmetriakse er fastspændt, men legemet kan rotere frit om aksen. Når legemet drejes en lille vinkel væk fra ligevægtsstillingen og slippes, vil det udføre svingninger, se figur 3. Vinklen $\varphi(t)$ vil være en periodisk funktion af tiden med periode T.

A.2	Find bevægelsesligningen for $\varphi(t)$. Udtryk interimomentet af legemet mht. symmetriaksen S ved hjælp af T, b og de kendte størrelser (1). Det kan antages at vi kun forskyder legemet lidt fra ligevægtsstillingen, så φ er meget lille.	0.5pt

Vi vil nu udtrykke størrelsen og positionen af metalskiven i træcylinderen ved størrelserne fundet i spørgsmål **A.1** og **A.2** .

A.3	Find et udtryk for afstanden d som funktion af størrelserne (1) og b. Du kan benytte r_2 og h_2 som variable i dit udtryk, eftersom de vil blive beregnet i delopgave **A.5**.	0.4pt

A.4	Find legemets inertimoment I_S udtrykt ved b og de kendte størrelser (1). Du kan benytte r_2 og h_2 som variable i dit udtryk, eftersom de vil blive beregnet i delopgave **A.5**.	0.7pt

A.5	Udtryk h_2 og r_2 ved b, T samt de kendte størrelser (1), ved at bruge de overstående resultater.	1.1pt

Del B. Roterende rumstation (6.5 points)

Astronauten Alice bor på en rumstation, som er et gigantisk hjul (torus) med radius R som roterer omkring rotationsaksen og dermed producerer et kunstigt tyngdefelt for astronauterne. Astronauterne bor på indersiden af "fælgen". Vi kan se bort fra den svage gravitation der stammer fra rumstationens masse samt fra gulvets krumning.

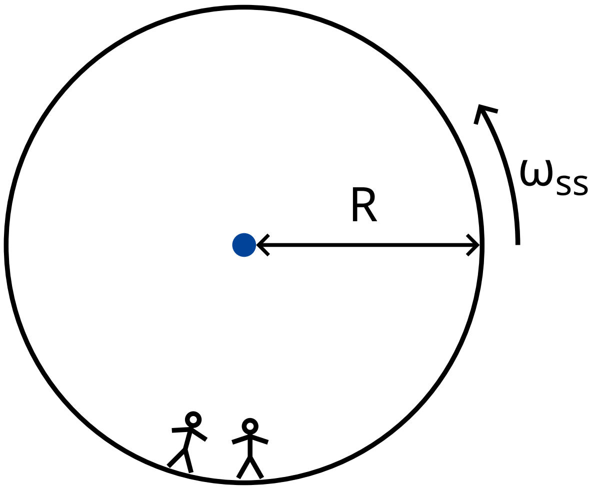
B.1	Med hvilken vinkelhastighed ω_{ss} skal rumstationen rotere for at at astronauterne oplever samme gravitation g_E som på Jordens overflade?	0.5pt

Alice og hendes astronaut-ven Bob er uenige: Bob tror ikke på, at de befinder sig på en roterende rumstation, men påstår at de befinder sig på Jordens overflade. Alice vil med fysiske eksperimenter forsøge at overbevise Bob om at de befinder sig på en roterende rumstation. Hun fæstner derfor et lod med massen m til en fjeder med fjederkonstanten k og bringer den til at oscillere. Loddet er forhindret i at bevæge sig fra side til side og vil derfor kun svinge i lodret retning.

B.2	Antag at man i stedet for er på Jorden og har en konstant tyngdeacceleration g_E. Hvilken vinkelfrekvens ω_E ville man så måle?	0.2pt

B.3	Hvilken vinkelfrekvens ω vil Alice måle på rumstationen?	0.6pt

Alice er overbevist om at hendes forsøg viser, at de befinder sig på en roterende rumstation. Bob er fortsat skeptisk; Bob påstår, at hvis man tager i betragtning at gravitationen fra Jorden ændres med højden over Jorden, så vil man finde en lignende effekt. Vi vil nu undersøge om Bob har ret.



Figur 4: Rumstation

B.4	Udled et udtryk for gravitationen $g_E(h)$ for en lille ændring af højden h over jordoverfladen og beregn den tilhørende vinkelfrekvens $\tilde{\omega}_E$ (en lineær tilnærmelse er tilstrækkelig). Jordens radius er R_E. Vi ser bort for Jordens rotation.	0.8pt

Det viser sig for denne rumstation at Alice faktisk måler netop den vinkelfrekvens, som Bob har forudsagt.

B.5	For hvilken radius R af rumstationen bliver vinkelfrekvensen ω lig med vinkelfrekvensen $\tilde{\omega}_E$ på Jorden? Udtryk dit svar ved R_E.	0.3pt

Udfordret af Bobs stædighed foreslår Alice et andet forsøg for at overbevise ham. Hun kravler op i et tårn med højden H og lader derfra et lod falde frit. Dette forsøg kan både beskrives i et roterende referencesystem såvel som et inertialsystem.

Astronauterne mærker en fiktiv kraft $\vec{F}_C$ kaldet corioliskraften i det roterende referencesystem. Kraften $\vec{F}_C$ påvirker et legeme med masse m og hastighed $\vec{v}$ målt i det roterende referencesystem er givet ved

$$\vec{F}_C = 2m\vec{v} \times \vec{\omega}_{ss} \; . \tag{2}$$

Størrelsen af corioliskraften er

$$F_C = 2mv\omega_{ss} \sin\phi \; , \tag{3}$$

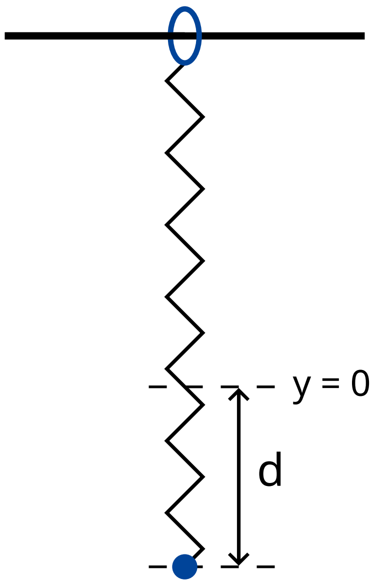
hvor ϕ er vinklen mellem hastighedsvektoren og rotationsaksen. Corioliskraften er vinkelret på såvel hastigheden v som rotationsaksen. Retningen for corioliskraften bestemmes ved hjælp af højrehåndsreglen.

B.6	Beregn den vandrette hastighed v_x og den vandrette forskydning d_x (i forhold til foden af tårnet) af loddet umiddelbart inden det rammer gulvet. Det kan antages at tårnets højde H er så lille at accelerationen som astronauterne måler, er konstant under faldet. Altså du kan antage at $d_x \ll H$.	1.1pt

For at få bedre resultater beslutter Alice at udføre eksperimentet fra et meget højere tårn end før. Til hendes overraskelse, rammer loddet nu gulvet ved foden af tårnet, dvs. $d = 0$.

B.7	Find en nedre grænse for tårnets højde hvor $d_x = 0$ kan finde sted.	1.3pt

Alice forsøger en sidste gang at overbevise Bob. Hun vil påvise corioliskraften ved hjælp af fjederen. Hun ændrer opstillingen så fjederen er fastgjort til en ring, der frit kan glide i x -retningen på en vandret stang uden friktion. Fjederen svinger i y-retningen. Stangen er vinkelret på rotationsaksen, og y-aksen peger mod centrum for rotationen. xy-planen er altså vinkelret på rotationsaksen.



Figur 5: Opstilling.

B.8	Alice trækker loddet vejlængden d nedad fra ligevægtsstillingen $x = 0$, $y = 0$ og slipper det, se figur 5. • Opstil et udtryk for $x(t)$ og et for $y(t)$. Man kan regne med at $\omega_{ss} d$ er lille og man kan se bort fra corioliskraftens virkning på bevægelse langs y-aksen. • Skitser banekurven for $(x(t), y(t))$ og angiv på figuren alle vigtige træk og størrelser som fx amplitude.	1.7pt

Alice og Bob er forsat uenige.