Dos Problemas de Mecánica (10 puntos)

Por favor asegúrese de leer las instrucciones generales dentro del sobre adjunto antes de comenzar a resolver este problema.

Parte A. El Disco oculto (3.5 puntos)

Consideramos un cilindro sólido de madera de radio r_1 y grosor h_1. En algún lugar dentro del cilindro la madera se ha sustituido por un disco de metal de radio r_2 y grosor h_2. El disco de metal está ubicado de tal forma que su eje de simetría B es paralelo al eje de simetría S del cilindro de madera. El disco de metal se coloca a la misma distancia de la cara superior que de la inferior del cilindro de madera. Denotamos la distancia de S a B como d. La densidad de la madera es ρ_1, mientras que de la del metal es $\rho_2 > \rho_1$. La masa total del cilindro de madera con el disco dentro es M.

Ponemos ahora el conjunto sobre una base horizontal de tal forma que pueda rodar libremente hacia la izquierda o la derecha. Vea la Figura 1 para una vista lateral y otra desde arriba del montaje.

El objetivo de la tarea es determinar el tamaño y posición del disco de metal.

En lo que sigue, cuando se le pida expresar el resultado en términos de cantidades conocidas, suponga siempre que las cantidades conocidas son:

$$r_1,\ h_1,\ \rho_1,\ \rho_2, M\ . \tag{1}$$

El objetivo es determinar r_2, h_2 y d, a través de mediciones indirectas.

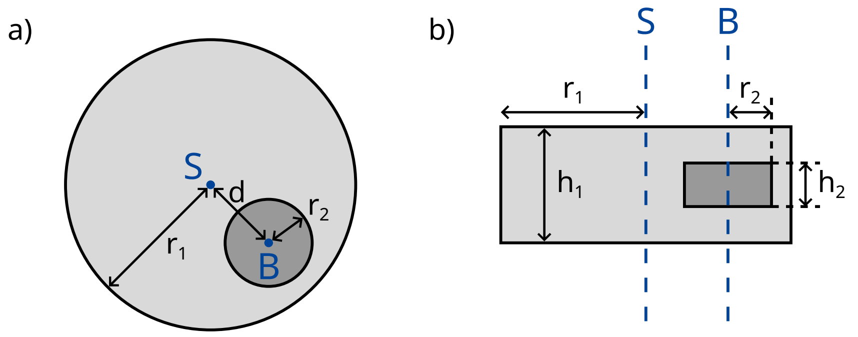

Figura 1: a) vista lateral b) vista desde arriba

Llamaremos *b* a la distancia desde el centro de masa C de todo el sistema al eje de simetría S del cilindro. Para determinar esta distancia, diseñamos el siguiente experimento: colocaremos todo el sistema en una base horizontal de manera que se encuentre en equilibrio estable. Ahora inclinamos la base lentamente hasta formar un ángulo Θ con la horizontal (ver Fig. 2). Como resultado de la fricción estática, el cilindro puede rodar un poco hacia abajo sin deslizar hasta detenerse en un equilibrio estable después de haber girado un ángulo ϕ.

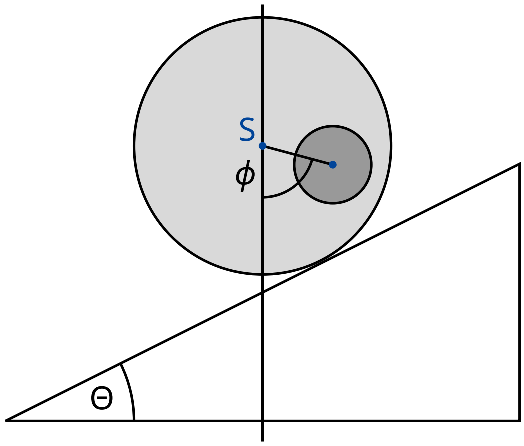

Figura 2: Cilindro sobre base inclinada.

A.1	Obtenga una expresión para b en función de las cantidades (1), el ángulo ϕ y el ángulo de inclinación de la base Θ .	0.8pt

A partir de ahora se considerará que el valor de b es conocido.

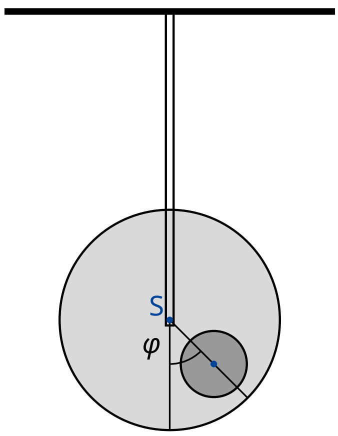

Figura 3: Cilindro suspendido

A continuación queremos medir el momento de inercia I_S del sistema con respecto al eje de simetría S. Con este objetivo lo suspendemos por su eje de simetría. Luego lo giramos ligeramente desde su posición de equilibrio en un ángulo φ pequeño y lo soltamos, como se muestra en la figura 3. Entonces observamos que φ describe un movimiento periódico con período T.

A.2	Obtenga la ecuación de movimiento para φ. Exprese I_S, momento de inercia del sistema alrededor de su eje de simetría S, en términos de T, b y las cantidades conocidas (1). Suponga que solo nos separamos ligeramente del equilibrio, de modo que φ siempre es pequeño.	0.5pt

Ahora queremos determinar la geometría y la posición del disco de metal dentro del cilindro empleando los resultados de las preguntas **A.1** y **A.2**,

A.3	Obtenga una expresión para la distancia d en función de b y de las cantidades (1). También puede incluir r_2 y h_2 como variables en su expresión, ya que se calcularán en la subtarea **A.5**.	0.4pt

A.4	Obtenga una expresión para el momento de inercia I_S en términos de b y las cantidades conocidas (1). También puede incluir r_2 y h_2 como variables en su expresión, ya que se calculan en la subtarea **A.5**.	0.7pt

A.5	Usando todos los resultados anteriores, escriba una expresión para h_2 y r_2 en términos de b, T y las cantidades (1). Obtenga también h_2 en función de r_2.	1.1pt

Parte B. Estación espacial en rotación (6.5 puntos)

Alice es una astronauta que vive en una estación espacial. La estación espacial es una rueda gigante de radio R rotando alrededor de su eje de modo que produce una gravedad artificial en los astronautas. Los astronautas viven en el costado interior de la rueda. Ignoraremos la atracción gravitacional de la estación espacial y la curvatura del suelo.

B.1	¿A qué frecuencia angular ω_{ss} debe rotar la estación espacial para que los astronautas perciban la misma aceleración gravitacional g_E que en la superficie de la Tierra?	0.5pt

Alice y su amigo astronauta Bob no se ponen de acuerdo. Bob no cree que en realidad estén viviendo en una estación espacial sino que en realidad están en la Tierra. Alice quiere demostrarle a Bob, usando la física, que en realidad viven en una estación espacial rotatoria. Con este objetivo, Alice sujeta una masa m a un resorte de constante elástica k y le deja oscilar. La masa oscila solo en la dirección vertical y no se puede mover en la dirección horizontal.

B.2	Suponiendo que la gravedad de la Tierra es constante con aceleración g_E, ¿cuál sería la frecuencia de oscilación ω_E que mediría una persona en la Tierra?	0.2pt

B.3	¿Cuál es la frecuencia angular de oscilación ω que medirá Alice en la estación espacial?	0.6pt

Alice está convencida de que su experimento prueba que se encuentran en una estación espacial rotatoria. Bob sigue escéptico. El asegura que al tener en cuenta el cambio de la gravedad por encima de la superficie de la Tierra, uno encuentra un efecto similar.

En las preguntas siguientes investigaremos si Bob está en lo cierto.

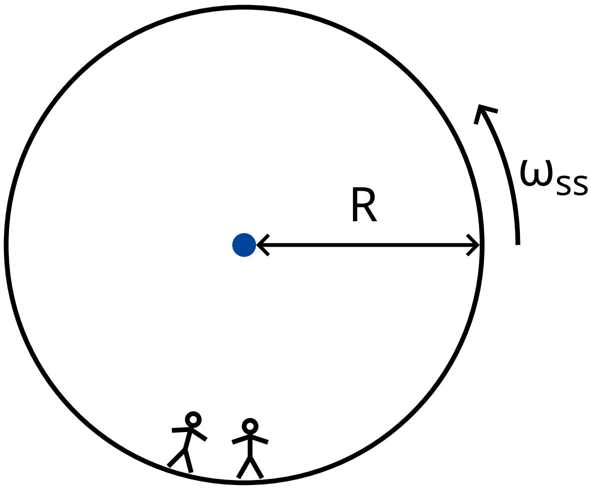

Figura 4: Estación espacial

B.4	Obtenga una expresión para la gravedad $g_E(h)$ para pequeñas alturas h sobre la superficie de la Tierra y calcule la frecuencia angular $\tilde{\omega}_E$ de oscilación (una aproximación lineal es suficiente). Llame R_E al radio de la Tierra. Desprecie la rotación de la Tierra.	0.8pt

De hecho, Alice se da cuenta que en esta estación espacial en particular el resorte oscila con la frecuencia que Bob predijo.

B.5	¿Para qué radio R de la estación espacial su frecuencia de osciliación ω coincidirá con la frecuencia de oscilación $\tilde{\omega}_E$ en la Tierra? Exprese el resultado en términos de R_E.	0.3pt

Exasperada con la terquedad de Bob, a Alice se le ocurre un experimento para demostrar que tiene razón. Para esto, sube a una torre de altura H respecto al suelo de la estación espacial y suelta una masa. Este experimento se puede analizar tanto en el sistema de referencia en rotación como en el sistema de referencia inercial.

En un sistema de referencia en rotación uniforme, los astronautas perciben una fuerza ficticia $\vec{F}_C$ llamada fuerza de Coriolis. La fuerza $\vec{F}_C$ que actúa sobre un objeto de masa m que se mueve a velocidad $\vec{v}$ en un sistema de referencia que rota con frequencia angular constante $\vec{\omega}_{ss}$ viene dada por

$$\vec{F}_C = 2m\vec{v} \times \vec{\omega}_{ss} \ . \tag{2}$$

En términos de las cantidades escalares que se le permite usar

$$F_C = 2mv\omega_{ss} \sin\phi \ , \tag{3}$$

donde ϕ es el ángulo entre la velocidad y el eje de rotación. La fuerza es perpendicular tanto a la velocidad v como al eje de rotación. El signo de la fuerza se puede determinar por la regla de la mano derecha, pero en lo que sigue se puede escoger libremente.

B.6	Calcule la velocidad horizontal v_xy el desplazamiento d_x de la masa (respecto a la base de la torre y en dirección perpendicular a la torre) en el instante en que choca con el suelo. Suponga que la altura de la torre *H* es pequeña, de modo que la aceleración que miden los astronautas es constante durante la caída. Suponga también que $d_x \ll H$.	1.1pt

Para obtener un buen resultado, Alice decide llevar a cabo el experimento en una torre mucho más alta que la anterior. Para su sorpresa, en este caso la masa choca con suelo justo en la base de la torre, es decir que $d_x = 0$.

B.7	Obtenga el valor mínimo de la altura de la torre para el que se puede conseguir que $d_x = 0$.	1.3pt

Alice quiere intentar convencer a Bob por última vez. Para ello va a emplear un resorte con el que mostrar el efecto de la fuerza de Coriolis. Con esta idea, cambia el montaje original: ahora suspende el resorte de un anillo que se puede deslizar sin rozamiento a lo largo de una vara horizontal en la dirección x . La oscilación del resorte ocurre en la dirección y. La vara se sitúa paralela al suelo y perpendicular al eje de rotación de la estación espacial. El plano xy es por lo tanto perpendicular al eje de rotación, con la dirección y apuntando hacia el centro de rotación de la estación.

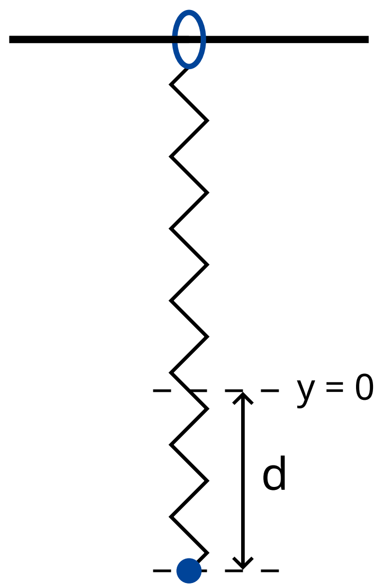

Figura 5: Montaje.

B.8	Alice desplaza la masa una distancia d hacia abajo desde el punto de equilibrio $x = 0$, $y = 0$, y entonces la suelta (ver figura 5). • Obtenga una expresión algebraica para $x(t)$ y $y(t)$. Suponga que ($\omega_{ss} d$) es una cantidad pequeña y desprecie la fuerza de Coriolis en el movimiento a lo largo del eje *y*. • Dibuje la trayectoria $(x(t), y(t))$, señalando todas las características importantes tales como la amplitud.	1.7pt

Alice y Bob continúan su desencuentro...