Kaks mehaanikaülesannet (10 punkti)

Palun lugege enne selle ülesande kallale asumist eraldi ümbrikus asuvat üldjuhendit (*general instructions*).

Osa A. Peidetud ketas (3.5 punkti)

Vaatleme puitsilindrit raadiusega r_1 ja paksusega h_1. Kusagil silindri sees on metallketas raadiusega r_2 ja paksusega h_2. Metallketas paikneb nii, et selle sümmeetriatelg B on paralleelne puitsilindri sümmeetriateljega S. Metallketas asetseb võrdsel kaugusel nii puitsilindri ülemisest kui alumisest tahust. Tähistagu d telgede S ja B vahekaugust. Puidu tihedus on ρ_1 ja metalli tihedus on $\rho_2 > \rho_1$. Puitsilindri ja metallketta kogumass on M.

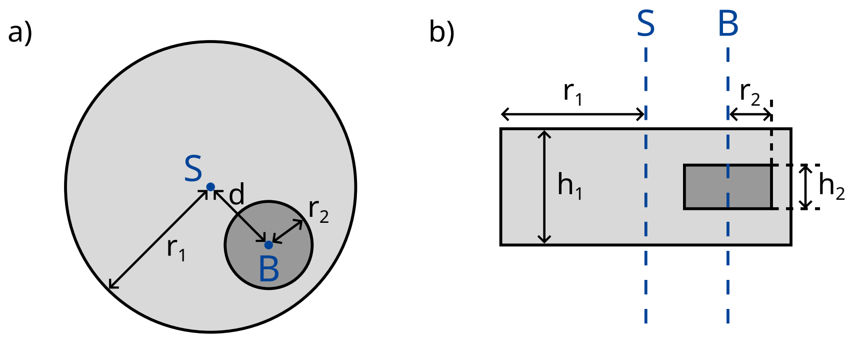
Selles ülesandes paigutame puitsilindri tasapinnale nii, et see saab vabalt veereda vasakule-paremale. Joonisel 1 on esitatud silindri ja ketta eestvaade ja pealtvaade.

Selle ülesande osa eesmärgiks on määrata metallketta suurus ja asukoht.

Kui järgnevates küsimustes palutakse teil tulemus avaldada tuntud suuruste kaudu, võite alati eeldada, et järgnevad suuruse on tuntud:

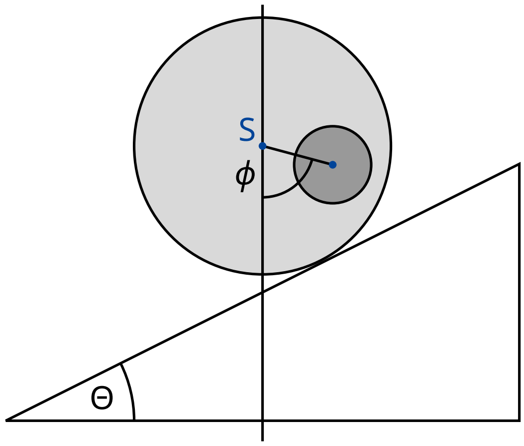
$$r_1,\ h_1,\ \rho_1,\ \rho_2, M\ . \tag{1}$$

Eesmärgiks on kaudsete mõõtmiste kaudu määrata suurused r_2, h_2 ja d.



Joonis 1: a) külgvaade b) pealtvaade

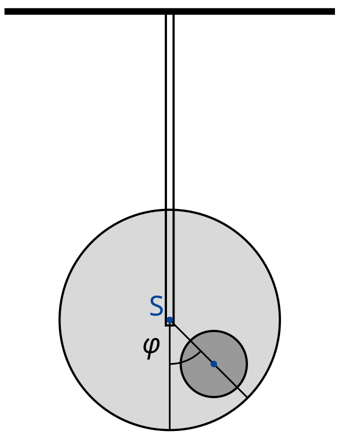
Tähistagu suurus b vahemaad süsteemi massikeskme C ja puitsilindri telje S vahel. Selleks, et seda vahemaad määrata, viime läbi järgneva eksperimendi. Asetame puitsilindri horisontaalsele alusele nii, et puitsilinder on stabiilses tasakaalus. Nüüd kallutame alust nurga Θ võrra (vt joonis 2). Tänu staatilisele hõõrdele saab puitsilinder ilma libisemata vabalt veereda. Puitsilindri uus stabiilne tasakaaluasend on niisugune, mida kirjeldab pöördenurk ϕ eelneva tasakaaluasendi suhtes.



Joonis 2: Silinder ja kallutatud alus.

A.1	Leidke suuruse b avaldis funktsioonina tuntud suurustest (1), nurgast ϕ ja aluse kaldenurgast Θ.	0.8pt

Järgnevas võime lugeda suuruse b tuntud suuruseks.



Joonis 3: Riputatud süsteem.

Järgnevalt soovime mõõta süsteemi inertsimometi I_S selle sümmeetriatelje S suhtes. Selle jaoks kinnitame puitsilindri selle sümmeetriateljest jäiga pulgaga. Seejärel pöörame silindrit tasakaaluasendist väikese nurga φ võrra eemale ja laseme lahti (vt joonis 3). Märkame, et nurk φ muutub perioodiliselt perioodiga T.

A.2	Leidke liikumisvõrrand nurga φ jaoks. Avaldage süsteemi inertsimoment I_S ümber sümmeetriatelje, kasutades suurusi T, b ja tuntud suurusi (1). Võite eeldada, et kõrvalekalded tasakaaluasendist on väikesed, nii et nurk φ on alati väga väike.	0.5pt

Järgnevalt soovime määrata puitsilindris oleva metallketta mõõtmed ja asukoha, kasutades küsimustes **A.1** ja **A.2** tehtud mõõtmisi.

A.3	Leidke kauguse d avaldis funktsioonina b-st ja tuntud suurustest (1). Samuti võite oma avaldises kasutada suurusi r_2 ja h_2, sest need arvutatakse küsimuses **A.5**.	0.4pt

A.4	Leidke inertsimomendi I_S avaldis funktsioonina b-st ja tuntud suurustest (1). Samuti võite oma avaldises kasutada suurusi r_2 ja h_2, sest need arvutatakse küsimuses A.5.	0.7pt

A.5	Kasutades kõiki eelnevaid tulemusi, kirjutage välja avaldised h_2 ja r_2 jaoks funktsioonina b-st, T-st ja tuntud suurustest (1). Võite avaldada h_2 funktsioonina r_2-st.	1.1pt

Osa B. Pöörlev kosmosejaam (6.5 punkti)

Alice on kosmisejaamas töötav astronaut. Kosmosejaamaks on gigantne ratas raadiusega R, mis pöörleb ümber oma telje ja tekitab seeläbi tehisliku gravitatsiooni. Astronaudid elavad selle ratta serva sisemisel küljel. Kosmosejaam ise on nii kerge, et selle gravitatsioonilise külgetõmbega me ei arvesta ja nii suur, et põrandapinna kõverust saab ignoreerida.

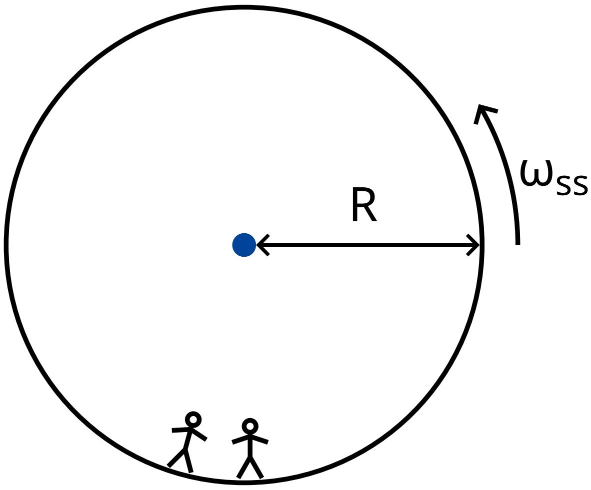
B.1	Kui suure nurkkiirusega ω_{ss} pöörleb kosmosejaam, kui on teada, et astronaudid tunnevad sama suurt gravitatsioonikiirendust g_E kui Maa pinnal olles?	0.5pt

Alice ja tema astronaudist sõber Bob satuvad vaidlema. Bob ei usu, et nad elavad kosmosejaamas ja väidab hoopis, et nad on Maal. Alice tahab füüsikat kasutades Bobile tõestada, et nad elavad pöörlevas kosmosejaamas. Selle jaoks kinnitab ta vedru (jäikusteguriga k) külge koormise massiga m ja laseb sel võnkuda. Koormis võngub ainult vertikaalsuunas, kuid ei saa horistonaalsuunas liikuda.

B.2	Eeldades, et Maa pinnal on konstantne gravitatsioonikiirendus g_E, milline oleks selle võnkumise nurksagedus ω_E, kui seda Maa pinnal mõõta?	0.2pt

B.3	Missuguse võnkumise nurksageduse ω mõõdab Alice kosmosejaamas?	0.6pt

Alice on veendunud, et tema eksperiment tõestab, et nad tõepoolest elavad pöörlevas kosmosejaamas. Bob jääb aga skeptiliseks. Ta väidab, et kui ka Maa pinnal võtta arvesse gravitatsioonikiirenduse muutumine, saaksime sama tulemuse. Järgnevalt uurime, kas tal on õigus?



Joonis 4: kosmosejaam

B.4	Tuletage avaldis gravitatsioonikiirendusele $g_E(h)$ väikestel kõrgustel h üle Maa pinna (lineaarsest lähendist piisab) ja arvutage koormise võnkumiste ringsagedus $\tilde{\omega}_E$. Maa raadius on R_E. Maa pöörlemist ärge arvestage.	0.8pt

Tõepoolest, Alice näeb, et vedrupendel võngub täpselt selle sagedusega, mida Bob ennustas.

B.5	Millise kosmosejaama raadiuse R korral on võnkumise nurksagedused ω kosmosejaamas ja $\tilde{\omega}_E$ Maa pinnal omavahel võrdsed?	0.3pt

Bobi kangekaelsus hakkab Alice'it tüütama, nii et ta tuleb välja eksperimendiga oma seisukoha tõestamiseks. Selleks ronib Alice torni otsa, mille kõrgus on H (mõõdetuna kosmosejaama põrandast), ning laseb raskusel vabalt langeda. Sellest eksperimendist aru saamiseks võib kasutada nii pöörlevat kui ka inertsiaalset taustsüstemi.

Ühtlaselt pöörlevas taustsüsteemis tajuvad astronoomid näilist Coriolise jõudu $\vec{F}_C$. Coriolise jõud, mis mõjub kehale massiga m, mis liigub kiirusega $\vec{v}$ konstantse nurksagedusega $\vec{\omega}_{ss}$ pöörlevas taustsüsteemis, avaldub kujul

$$\vec{F}_C = 2m\vec{v} \times \vec{\omega}_{ss} \ . \tag{2}$$

Skalaarsuuruste kaudu avaldub see kujul

$$F_C = 2mv\omega_{ss} \sin\phi \ , \tag{3}$$

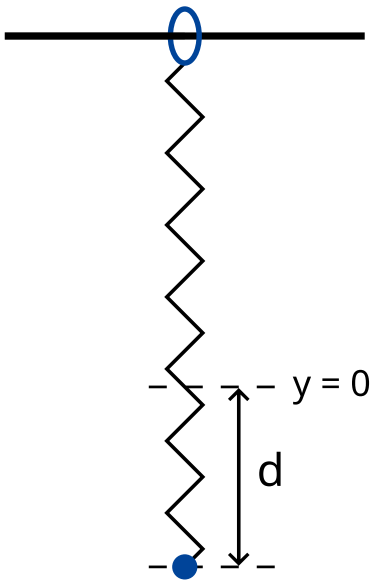
kus ϕ on nurk kiirusvektori ja pöörlemistelje sihi vahel. Coriolise jõud on risti nii kiirusega v kui ka pöörlemisteljega. Jõu märgi saab küll leida parema käe reeglist, kuid järgnevas võite märgi lihtsalt vabalt valida.

B.6	Leidke horisontaalne kiirus v_x ja horisontaalne nihe d_x (torni aluse suhtes, torniga risti), mille raskus on omandanud selleks hetkeks, kui ta põrandani jõuab. Võite eeldada, et torni kõrgus on nii väike, et vertikaalkiirendus, mida astronaudid mõõdavad kukkumise jooksul, on konstante. Samuti võite eeldada, et $d_x \ll H$.	1.1pt

Et saada head mõõtmistulemust, otsustab Alice eksperimendi läbi viia oluliselt kõrgemast tornist kui enne. Oma üllatuseks avastab Alice, et raskus kukub kosmoselaeva põrandale täpselt torni jalami juures, st $d_x = 0$.

B.7	Leidke torni kõrguse alampiir, mille korral saab juhtuda, et $d_x = 0$.	1.3pt

Alice teeb viimase katse Bobi veenmiseks. Ta soovib kasutada oma vedrupendlit Coriolise jõu mõju demonstreerimiseks. Selleks muudab ta oma esialgset katseseadet nii, et kinnitab vedru ülemise otsa rõnga külge, mis saab x-telje sihis hõõrdevabalt liikuda mööda horisontaalset latti. Vedru ise võngub y-telje sihis. Latt asetseb paralleelselt kosmoselaeva põrandaga ning on risti selle pöörlemisteljega. Niisiis, xy-tasand on risti pöörlemisteljega ja y-telg on suunatud otse kosmosejaama pöörlemiskeskme poole.



Joonis 5: Katseseade.

B.8	Alice tõmbab koormise tasakaaluasendist ($x = 0$, $y = 0$) kaugusele d (vt joonis 5) ning laseb siis lahti. • Esitage avaldised $x(t)$ ja $y(t)$ jaoks. Võite eeldada, et $\omega_{ss} d$ on väike. • Skitseerige trajektoor $(x(t), y(t))$, tähistades kõik olulised suurused nagu näiteks amplituud.	1.7pt

Alice ja Bob vaidlevad edasi.