Две задачи по механике (10 баллов)

Прежде, чем приступить к решению задачи, пожалуйста прочитайте инструкцию, находящуюся в отдельном конверте.

Часть А. Спрятанный диск (3,5 балла)

Расмотрим твердый деревянный цилиндр радиуса r_1 и толщиной h_1. Где-то внутри деревянного цилиндра древесина заменена на металлический диск радиуса r_2 и толщиной h_2. Металлический диск установлен так, что его ось симметрии B параллельна оси симметрии S деревянного цилиндра и диск находится на одинаковых расстояниях от верхнего и нижнего оснований деревянного цилиндра. Обозначим расстояние между осями S и B как d. Плотность древесины ρ_1, плотность металла $\rho_2 > \rho_1$. Суммарная масса деревянного цилиндра с металлическим диском равна M.

В данном задании поместим деревянный цилиндр на плоскость так, что он может свободно вращаться направо-налево. На рис. 1 показаны виды цилиндра с торца и сверху.

Целью данного задания является определение размеров и места расположения металлического диска.

В дальнейшем, если вам предлагают выразить результаты через известные величины, всегда считайте, что следующие величины известны:

$$r_1,\ h_1,\ \rho_1,\ \rho_2, M\ . \tag{1}$$

Цель — определить r_2, h_2 и d путем косвенных измерений.

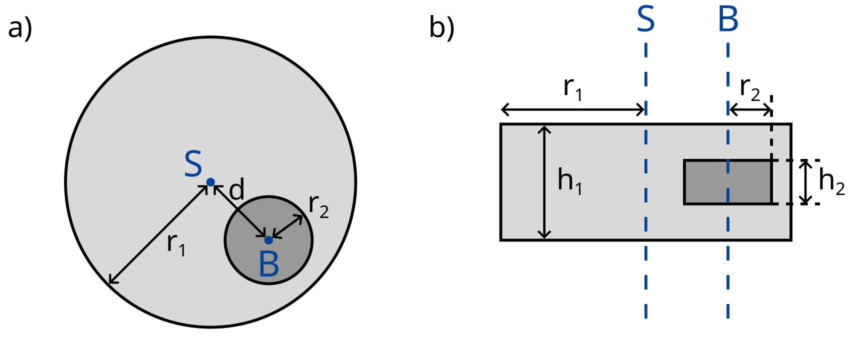

Рис. 1. а) вид с торца лининдра b) вид сверху

Расстояние между центром масс всей системы C и осью симметрии деревянного цилиндра S равно b. Для того, чтобы определить это расстояние, рассмотрим следующий эксперимент: деревянный цилиндр установлен на горизонтальной плоскости так, что он находится в устойчивом равновесии. Медленно наклоним плоскость на угол Θ (см. рис. 2). Из-за наличия трения деревянный цилиндр может свободно вращаться без проскальзывания. Он чуть-чуть скатится вниз, а затем придет в состояние устойчивого равновесия после поворота на угол ϕ , который мы измерим.

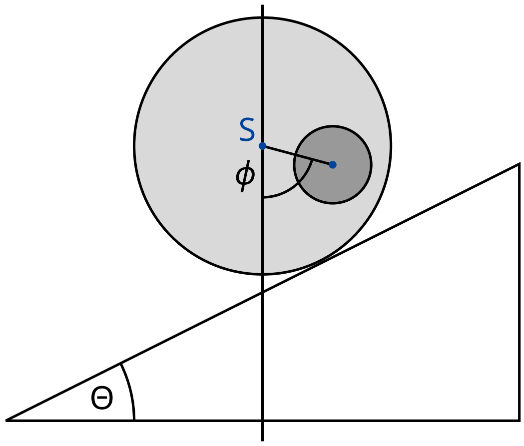

Рис. 2. Цилиндр на наклонной плоскости.

A.1	Получите выражение для b как функцию величин (1), угла ϕ и угла наклона плоскости Θ.	0.8pt

С этого момента считаем, что величина b известна.

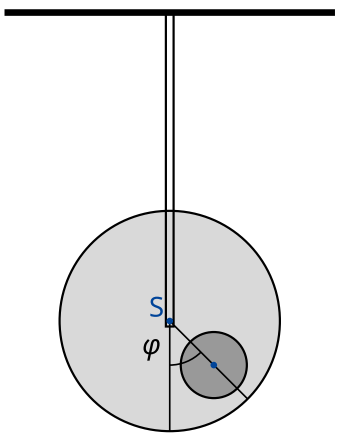

Рис. 3. Подвешенная система.

Теперь мы хотим измерить момент инерции I_S системы относительно оси симметрии S. Для этого закрепим деревянный цилиндр за его ось симметрии с помощью жесткого стержня. Затем повернем его относительно положения равновесия на небольшой угол φ и отпустим его. Схема эксперимента показана на рис. 3. Окажется, что φ меняется периодически с периодом T.

A.2	Получите уравнение движения для φ. Выразите момент инерции цилиндра I_S относительно его оси симметрии S через T, b и известные величины (1). Считайте, что отклонение от положения равновесия невелико, так что угол φ можно считать очень малой величиной.	0.5pt

Используя результаты измерений из пунктов **A.1** и **A.2** определим геометрические размеры металлического диска и его положение внутри деревянного цилиндра.

A.3	Получите выражение для расстояния d как функцию b и величин (1). Вы можете также включить в ваше выражение в качестве переменных r_2 и h_2, т.к. они будут вычислены в пункте **A.5**.	0.4pt

A.4	Получите выражение для момента инерции I_S как функцию b и известных величин (1). Вы можете также включить в ваше выражение в качестве переменных r_2 и h_2, т.к. они будут вычислены в пункте **A.5**.	0.7pt

A.5	Используя полученные выше результаты, запишите выражения для h_2 и r_2через b, T и известные величины (1). Вы можете выразить h_2 как функцию r_2.	1.1pt

Часть B. Вращающаяся космическая станция (6,5 баллов)

Алиса - космонавт, она живет на космической станции. Космическая станция представляет собой гигантское колесо радиуса R, которое вращается вокруг своей оси, тем самым создавая для космонавтов искусственную гравитацию. Космонавты живут на внутренней стороне обода колеса. Силой гравитационного притяжения космической станции и кривизной пола можно пренебречь.

B.1	С какой циклической частотой ω_{ss} должна вращаться станция, чтобы космонавты испытывали такое же ускорение свободного падения g_E, как на поверхности Земли?	0.5pt

Алиса поспорила со своим другом - космонавтом Бобом. Боб не верит в то, что они действительно живут на космической станции и утверждает, что они находятся на Земле. Алиса хочет с помощью физики доказать Бобу, что они живут на вращающейся космической станции. Для этого она прикрепила массу m к пружине с жесткостью k и заставила ее колебаться. Масса колеблется только в вертикальном направлении и не может перемещаться в горизонтальном направлении.

B.2	Полагая, что ускорение свободного падения на Земле постоянно и равно g_E, чему будет равна циклическая частота колебаний ω_E, измеренная человеком на Земле?	0.2pt

B.3	Какую циклическую частоту ω измерит Алиса на космической станции?	0.6pt

Алиса считает, что ее опыт доказывает, что они находятся на вращающейся космической станции. Боб по-прежнему сомневается. Он утверждает, что если принять во внимание изменение силы притяжения по мере поднятия над поверхностью Земли, получится то же самое.

В дальнейших заданиях мы изучим вопрос: прав ли Боб.

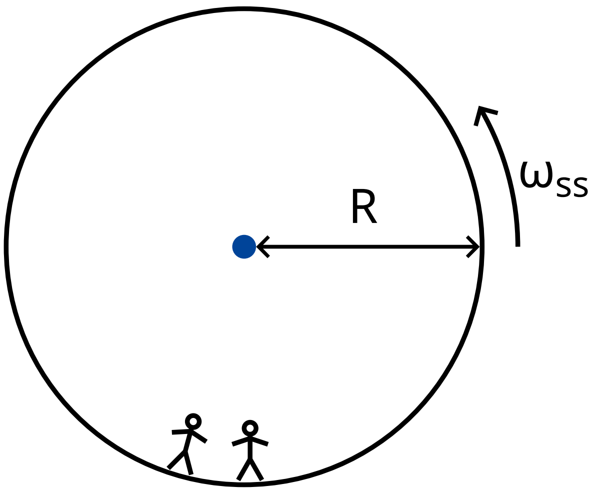

Рис. 4. Космическая станция

B.4	Получите выражение для ускорения свободного падения $g_E(h)$ для небольших высот h над поверхностью Земли и вычислите циклическую частоту колебаний $\tilde{\omega}_E$ колеблющегося груза (достаточно использовать линейное приближение). Обозначьте радиус Земли за R_E. Пренебрегите вращением Земли.	0.8pt

Разумеется, для данной космической станции Алиса обнаружила, что пружинный маятник колеблется с той частотой, которую предсказал Боб.

B.5	Для какого радиуса космической станции R частота колебаний ω совпадает с частотой колебаний $\tilde{\omega}_E$ на поверхности Земли? Выразите свой ответ через R_E.	0.3pt

Раздраженная упрямством Боба, Алиса решила провести эксперимент, чтобы доказать свою точку зрения. Для этого она залезла на башню высотой H от пола и уронила груз. Этот эксперимент можно рассматривать во вращающейся системе координат, а также в инерциальной системе координат.

В равномерно вращающейся системе координат на космонавтов действует фиктивная сила $\vec{F}_C$, называемая силой Кориолиса. Сила $\vec{F}_C$, действующая на объект массой m, движущийся со скоростью $\vec{v}$ в системе координат, вращающейся с постоянной циклической частотой $\vec{\omega}_{ss}$ определяется выражением

$$\vec{F}_C = 2m\vec{v} \times \vec{\omega}_{ss} \ . \tag{2}$$

Вы можете использовать это выражение в скалярном виде:

$$F_C = 2mv\omega_{ss} \sin\phi \ , \tag{3}$$

где ϕ — угол между скоростью и осью вращения. Сила перпендикулярна как скорости v, так и оси вращения. Знак силы определяется правилом правой руки, но в дальнейшем вы можете свободно выбрать его по своему усмотрению.

B.6	Вычислите горизонтальную скорость v_x и горизонтальное смещение d_x (относительно пола башни в направлении, перпендикулярном башне) груза в момент времени, когда он ударится о пол. Можете считать, что высота H башни мала, так что ускорение, измеренное космонавтами постоянно во время падения. Также вы можете считать, что $d_x \ll H$.	1.1pt

Для получения хороших результатов Алиса решила провести этот опыт, используя гораздо более высокую башню, чем раньше. К её удивлению, масса упала на пол около основания башни, т.е. $d_x = 0$.

B.7	Найдите минимальную положительную высоту башни, для которой может произойти, что $d_x = 0$.	1.3pt

Алиса хочет предпринять последнюю попытку, чтобы убедить Боба. Она хочет использовать свой пружинный маятник, чтобы показать влияние силы Кориолиса. Для этого она переделала установку: прикрепила пружину к кольцу, которое может свободно скользить по горизонтальному стержню вдоль оси x без трения. Сама пружина колеблется в направлении y. Стержень параллелен полу и перпендикулярен оси вращения космической станции. Плоскость xy таким образом перпендикулярна оси вращения, а ось y направлена к центру вращения станции.

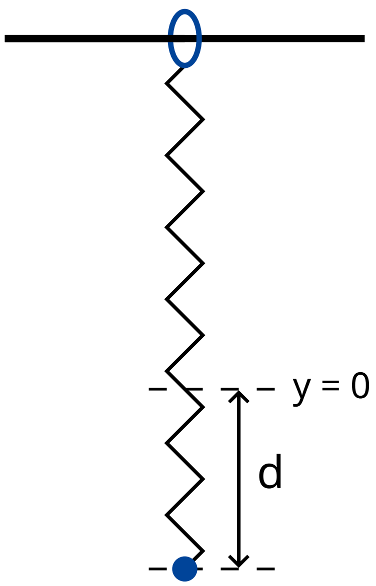

Рис. 5. Установка.

B.8 Алиса потянула массу d вниз от положения равновесия $x = 0$, $y = 0$, а затем отпустила (рис. 5). 1.7pt

- Приведите алгебраические выражения для $x(t)$ и $y(t)$. Величину $\omega_{ss}d$ можно считать малой. Можно пренебречь силой Кориолиса для движения вдоль оси y.
- Нарисуйте схематично траекторию $(x(t), y(t))$, отметив все характерные особенности, в частности, амплитуду.

Алиса и Боб продолжают спорить.