Kaksi tehtävää mekaniikasta (10 pistettä)

Lue yleisohjeet ennen tehtävien aloittamista.

Osa A: Piilotettu kiekko (3,5 pistettä)

Tässä tehtävässä käsitellään umpinaista puista sylinteriä, jonka säde on r_1 ja paksuus h_1. Sylinterin sisällä on metallikiekko, jonka säde on r_2 ja säde h_2. Metallikiekon symmetria-akseli B on yhdensuuntainen sylinterin symmetria-akselin S kanssa ja kiekko sijaitsee sylinterin keskikohdalla (samalla etäisyydellä sylinterin päistä). Merkitsemme etäisyyttä akselien S ja B välillä kirjaimella d. Puun tiheys on ρ_1 ja metallin tiheys $\rho_2 > \rho_1$. Puusylinterin kokonaismassa metallikiekkoineen on M.

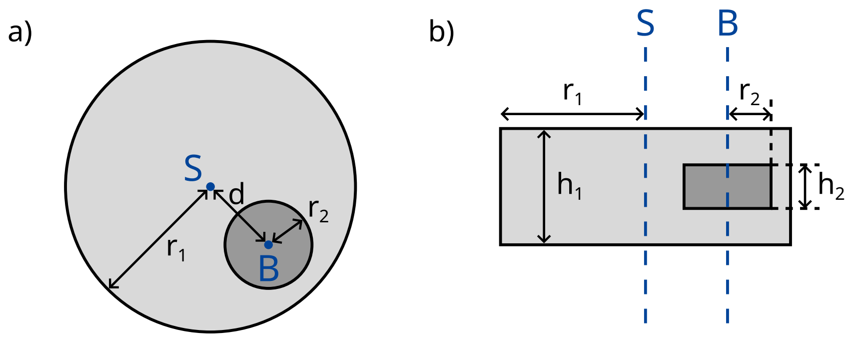
Asetetaan sylinteri vaakasuoralle alustalle siten, että se on vapaa vierimään sekä oikealle että vasemmalle. Tilanne on esitetty kuvassa 1 sekä sivulta että yläpuolelta.

Tavoitteena on määrittää sylinterin sisällä olevan metallikiekon koko ja paikka.

Seuraavassa pyydetään ilmaisemaan tulokset tuneettujen suureiden avulla. Näitä ovat ainakin:

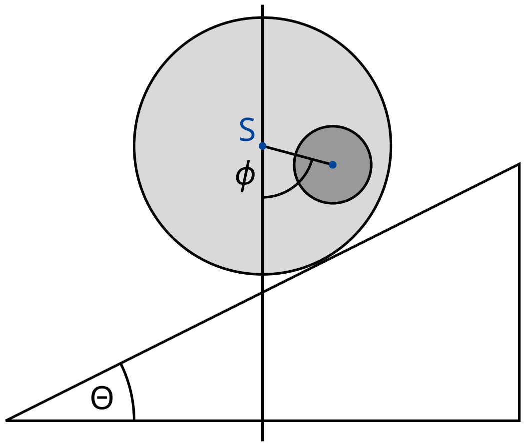
$$r_1,\ w_1,\ \rho_1,\ \rho_2, M\ . \tag{1}$$

Tavoitteena on siis määrittää r_2, h_2 ja d epäsuorista mittauksista.



Kuva 1: a) sylinteri sivulta b) sylinteri päältä

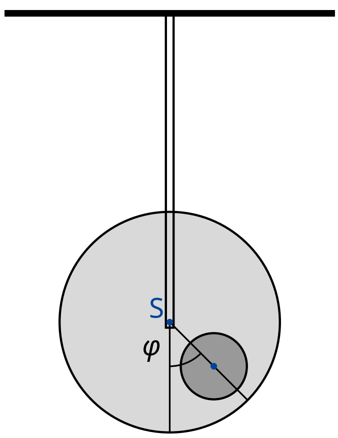
Olkoon b etäisyys koko sylinterin massakeskipisteen C ja sen symmetria-akselin S välillä. Tämän etäisyyden määrittämiseksi asetamme sylinterin vaakasuoralle alustalle stabiiliin tasapainoon, minkä jälkeen kallistamme alustan hitaasti kulmaan Θ (ks. kuva 2). Lepokitkan ansiosta sylinteri vierii liukumatta lyhyen matkan ja pysähtyy uuteen tasapainoon kierittyään kulman ϕ verran. Määritämme tämän kulman suuruuden.



Kuva 2: Sylinteri kaltevalla tasolla.

A.1	Määritä lauseke etäisyydelle b tunnettujen suureiden (1) sekä kulmien ϕ ja Θ funktiona.	0.8pt

Seuraavassa voimme olettaa etäisyyden b tunnetuksi.



Kuva 3: Riippuva sylinteri

Seuraavaksi haluamme mitata sylinterikokonaisuuden hitausmomentin I_S symmetria-akselin S suhteen. Tätä varten ripustamme sylinterin symmetria-akselistaan ja poikkeutamme sitä pienen kulman ϕ verran pois tasapainoasemastaan (ks. kuva 3). Selkeästi sylinteri joutuu irtipäästämiseen jälkeen kulmasta φ riippuvaiseen värähdysliikkeeseen, jonka jaksonaika on T.

A.2	Määritä liikeyhtälö kulmalle φ. Ilmaise hitausmomentti I_S symmetria-akselin S suhteen etäisyyden b ja jaksonajan T avulla. Käytössä ovat myös alussa luetellut suureet (1). Voit olettaa, että poikkeutuskulma ϕ tasapainoasemasta on hyvin pieni.	0.5pt

Seuraavaksi haluamme määrittää metallikiekon geometrian ja paikan sylinterin sisällä kohtien **A.1** ja **A.2** avulla.

A.3	Ilmaise etäisyys d etäisyyden b ja tunnettujen suureiden (1) avulla. Voit halutessasi käyttää myös kohdassa **A.5** määritettäviä suureita r_2 ja h_2.	0.4pt

A.4	Ilmaise hitausmomentti I_S etäisyyden b ja tunnettujen suureiden (1) avulla. Voit halutessasi käyttää myös kohdassa A.5 määritettäviä suureita r_2 ja h_2.	0.7pt

A.5	Ilmaise h_2 ja r_2 suureiden b ja T sekä edellisten vaiheiden tulosten avulla. Voit käyttää myös listattuja suureita (1). Voit ilmaista paksuuden h_2 säteen r_2 funktiona.	1.1pt

Osa B: Pyörivä avaruusasema (6,5 pistettä)

Alice on avaruusasemalla oleskeleva astronautti. Avaruusasema on valtava R-säteinen rengas, jonka sisälle luodaan keinopainovoima pyörittämällä asemaa akselinsa ympäri. Astronautit oleskelevat renkaan ulkokehän sisäpinnalla. Avaruusasema on kevyt, joten sen aiheuttama painovoima voidaan jättää huomiotta. Myös lattian kaarevuus voidaan jättää huomioimatta.

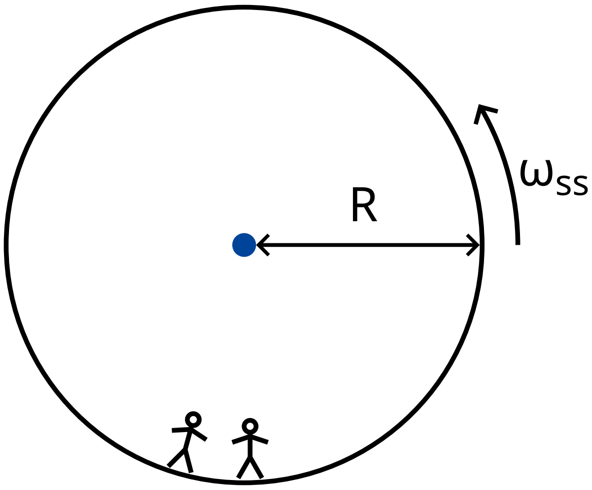
B.1	Millä kulmanopeudella ω_{ss} avaruusaseman täytyy pyöriä, jotta astronautit kokevat samansuuruisen putoamiskiihtyvyyden g_E kuin Maan pinnalla?	0.5pt

Alice ja hänen astronauttitoverinsa Bob kiistelevät, sillä Bob ei usko heidän olevan avaruusasemalla. Alice haluaa todistaa Bobille, että näin on ja asema pyörii. Todistaakseen väitteensä Alice kiinnittää jouseen (jousivakio k) punnuksen (massa m) ja laittaa tämän systeemin värähtelemään. Punnus värähtelee vain pystysuunnassa, sillä vaakasuuntainen liike on estetty.

B.2	Oletetaan, että painovoimakiihtyvyys Maassa on vakio g_E . Mikä olisi systeemin värähtelyn kulmataajuus ω_E Maan pinnalla?	0.2pt

B.3	Kuinka suuren kulmataajuuden ω Alice mittaa avaruusasemalla?	0.6pt

Alice on vakuuttunut, että hänen kokeensa todistaa heidän olevan pyörivällä avaruusasemalla. Bob kuitenkin epäilee edelleen. Bob väittää, että painovoimakiihtyvyyden muuttuminen maanpinnan yläpuolella aiheuttaa samankaltaisen ilmiön. Onko Bob oikeassa?



Kuva 4: Avaruusasema

B.4	Johda lauseke painovoimakiihtyvyydelle $g_E(h)$ pienellä etäisyydellä h maanpinnasta ja laske oskillaattorin kulmataajuus $\tilde{\omega}_E$. Lineaarinen approksimaatio riittää. Maan säde on R_E. Maan pyörimistä ei tarvitse ottaa huomioon.	0.8pt

Kokeillessaan Alice huomaa, että värähtelijä todellakin värähtelee Bobin ennustamalla taajuudella.

B.5	Millä avaruusaseman säteellä R värähtelijän kulmataajuus ω on sama kuin Maassa mitattu kulmataajuus $\tilde{\omega}_E$? Ilmaise vastauksesi säteen $R_E$avulla.	0.3pt

Bobin itsepäisyydestä ärsyyntyneenä Alice keksii uuden koejärjestelyn väitteensä todistamiseen. Alice kiipeää torniin, jonka korkeus aseman maatasosta on H, ja pudottaa punnuksen. Tämä koe voidaan käsitellä sekä pyörivässä että inertiaalisessa koordinaatistossa.

Tasaisesti pyörivässä koordinaatistossa olevat astronautit havaitsevat coriolisvoimaksi kutsutun valevoiman $\vec{F}_C$. Tasaisella kulmanopeudella $\vec{\omega}_{ss}$ pyörivässä koordinaatistossa nopeudella $\vec{v}$ etenevään m-massaiseen kappaleeseen vaikuttava coriolisvoima $\vec{F}_C$ on

$$\vec{F}_C = 2m\vec{v} \times \vec{\omega}_{ss} \, . \tag{2}$$

Skalaarisuureena tämä on

$$F_C = 2mv\omega_{ss} \sin\phi \, , \tag{3}$$

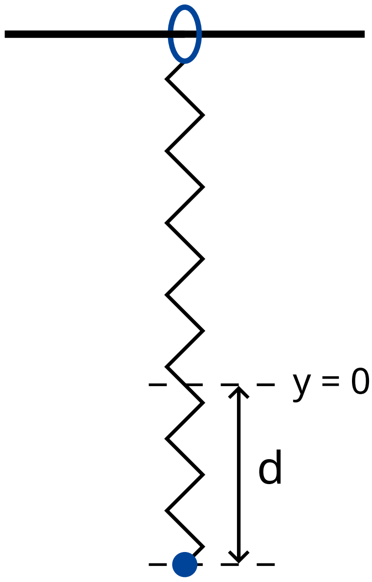
missä ϕ on nopeuden ja pyörimisakselin välinen kulma. Voima on kohtisuorassa sekä kappaleen nopeutta v että pyörimisakselia vasten. Voiman suunta voidaan päätellä oikean käden säännöllä, mutta seuraavassa voit valita suunnat vapaasti.

B.6	Määritä punnuksen vaakasuora nopeus v_x ja vaakasuora siirtymä d_x (tornin juuren suhteen, kohtisuoraan tornista mitattuna), kun se osuu lattiaan. Voit olettaa, että tornin korkeus H on pieni, jolloin astronauttien mittaama kiihtyvyys on vakio koko liikkeen ajan. Voit myös olettaa, että $d_x \ll H$.	1.1pt

Saadakseen hyvän tuloksen Alice päättää tehdä kokeen paljon korkeammasta tornista. Yllättäen punnus osuukin maahan aivan tornin juurella eli $d = 0$.

B.7	Määritä alaraja sellaisen tornin korkeudelle, jolle voi päteä $d_x = 0$.	1.3pt

Alice haluaa edelleen vakuuttaa Bobin väitteensä paikkansapitävyydestä. Hän haluaa käyttää rakentamaansa jousivärähtelijää coriolisvoiman vaikutusten esittämiseen. Päästäkseen haluamaansa hän muuttaa alkuperäistä koejärjestelyä: Hän kiinnittää jousen renkaaseen, joka voi liukua vapaasti x-suuntaista vaakasuoraa tankoa pitkin. Jousen värähtely tapahtuu y-suunnassa. Tanko on lattian suuntainen ja kohtisuorassa avaruusaseman pyörimisakselia vastaan. Näin ollen xy-taso on kohtisuorassa pyörimisakselia vastaan ja y-akseli osoittaa kohti renkaan keskipistettä.



Kuva 5: Koeasetelma

B.8	Alice vetää punnusta alaspäin matkan d tasapainoaseman ($x = 0$, $y = 0$) alapuolelle ja päästää sen irti (ks. kuva 5). • Anna algebrallinen lauseke funktioille $x(t)$ and $y(t)$. Voit olettaa, että $\omega_{ss} d$ on pieni. Coriolisvoiman vaikutuksen y-suuntaiseen liikkeeseen voi jättää huomiotta. • Luonnostele punnuksen rata $(x(t), y(t))$. Merkitse kuvaan kaikki tärkeät mitat, kuten amplitudin.	1.7pt

Kaikesta huolimatta Alice ja Bob ovat edelleen erimielisiä.