Deux problèmes de mécanique (10 points)

Veuillez lire les instructions générales situées dans l'enveloppe séparée avant de commencer ce problème.

Partie A. Le cylindre caché (3,5 points)

Considérons un solide cylindrique en bois de rayon r_1 et d'épaisseur h_1. Quelque part à l'intérieur de ce cylindre en bois se trouve un solide cylindrique en métal de rayon r_2 et d'épaisseur h_2. Le cylindre en métal est placé de telle sorte que son axe de symétrie B soit parallèle à l'axe de symétrie S du cylindre en bois. Le cylindre en métal est placé à la même distance des deux faces planes du cylindre en bois. La distance entre S et B est appelée d. La densité du bois est ρ_1, la densité du métal est $\rho_2 > \rho_1$. La masse totale du système complet (cylindre en bois et cylindre en métal) est M.

Dans cette partie, nous plaçons le système complet sur un plan de sorte qu'il puisse rouler dans un sens ou dans l'autre. Voir la Fig. 1 pour les vues de côté et de dessus de cet ensemble.

Le but de cette partie est de déterminer les tailles et position du cylindre métal.

Dans ce qui suit, quand il vous sera demandé d'exprimer un résultat en fonction de certaines quantités connues, vous pourrez considérer comme connues les grandeurs suivantes :

$$r_1,\ h_1,\ \rho_1,\ \rho_2, M\ . \tag{1}$$

Le but est de déterminer r_2, h_2 et d, indirectement en s'appuyant sur des mesures.

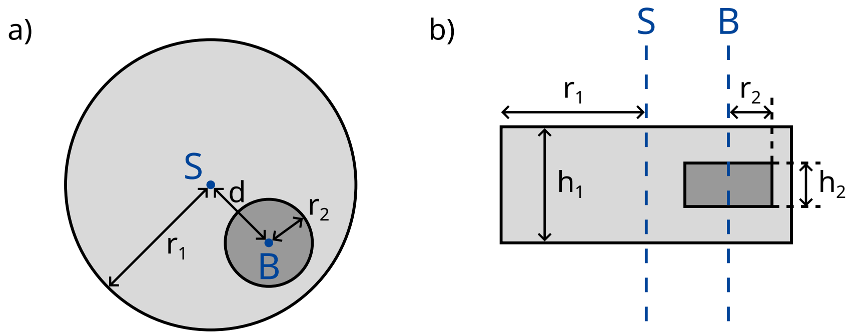

Figure 1 : a) vue de côté et b) vue de dessus.

Notons b la distance entre le centre de masse C du système complet et l'axe de symétrie S du cylindre en bois. Pour déterminer cette distance, mettons en place l'expérience suivante : plaçons tout d'abord le système complet sur un plan horizontal de telle sorte qu'il soit en équilibre stable. Puis inclinons lentement le plan d'un angle θ (voir Fig. 2). Grâce aux frottements, le système complet va rouler un peu, sans glisser, le long de la pente, puis va s'arrêter en équilibre stable après une rotation d'angle ϕ que nous pouvons mesurer.

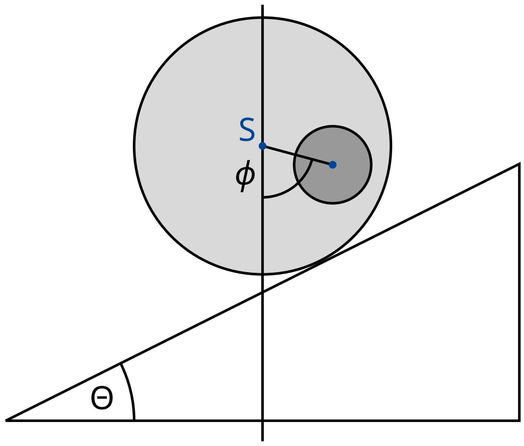

Figure 2 : Système complet sur un plan incliné.

A.1	Trouvez l'expression de b en fonction des grandeurs (1), de l'angle ϕ et de l'angle d'inclinaison θ du plan.	0.8pt

À partir de maintenant, nous pouvons supposer que la valeur de b est connue.

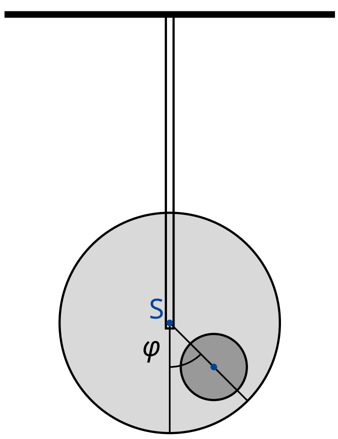

Figure 3 : Système complet rigidement suspendu.

Nous voulons ensuite déterminer le moment d'inertie I_S du système complet par rapport à l'axe S. Pour cela, suspendons le système complet par cet axe, puis écartons-le de sa position d'équilibre stable d'un petit angle φ (voir figure 3) et lâchons-le. Nous observons alors que φ suit une loi périodique de période T.

A.2	Trouvez l'équation du mouvement en φ. Exprimez le moment d'inertie I_S du système complet par rapport à l'axe S en fonction de T, b et des grandeurs connues (1). Vous pouvez supposer que nous perturbons à peine la position d'équilibre de départ de sorte que φ reste toujours très petit.	0.5pt

Grâce aux mesures des questions **A.1** et **A.2**, nous voulons maintenant déterminer la géométrie et la position du cylindre en métal à l'intérieur du système complet.

A.3	Trouvez l'expression de la distance d en fonction de b et des grandeurs connues (1). Vous pouvez utiliser également les grandeurs r_2 et h_2 dans votre expression car elles seront calculées ultérieurement en **A.5**.	0.4pt

A.4	Trouvez l'expression du moment d'inertie I_S en fonction de b et des grandeurs connues (1). Vous pouvez utiliser également les grandeurs r_2 et h_2 dans votre expression car elles seront calculées ultérieurement en **A.5**.	0.7pt

A.5	En utilisant les résultats ci-dessus, écrivez les expressions de h_2 et r_2 en fonction de b, T et des grandeurs connues (1). Pour ce faire, vous pourrez utiliser une relation entre h_2 et r_2.	1.1pt

Partie B. Station spatiale tournante (6,5 points)

Alice est une astronaute vivant dans une station spatiale. La station spatiale est une gigantesque roue de rayon R tournant autour de son axe de symétrie, prodiguant ainsi une gravité artificielle aux astronautes. Les astronautes vivent sur la face intérieure de la périphérie de la roue. L'attraction gravitationnelle due à la station spatiale et la courbure du sol peuvent être négligées.

B.1	À quelle pulsation ω_{ss} la station spatiale tourne-t-elle pour que les astronautes ressentent la même gravité g_E qu'à la surface de la Terre ?	0.5pt

Alice et son ami astronaute Bob ont une discussion. Bob ne croit pas qu'ils vivent dans une station spatiale et prétend qu'ils sont en fait sur Terre. Grâce à la physique, Alice veut prouver à Bob qu'ils vivent bien dans une station spatiale en rotation. Pour cela, elle attache une masse m à un ressort de constante de raideur k et la fait osciller. La masse oscille seulement dans la direction verticale et ne peut pas bouger dans la direction horizontale.

B.2	En supposant que l'accélération de la pesanteur sur Terre g_E est constante, quelle serait la pulsation des oscillations ω_E que l'on mesurerait si on était sur Terre ?	0.2pt

B.3	Quelle pulsation des oscillations ω Alice mesure-t-elle dans la station spatiale ?	0.6pt

Alice est convaincue que son expérience prouve qu'ils sont dans une station spatiale tournante. Bob reste sceptique. Il prétend qu'en considérant la variation de pesanteur au-dessus de la surface de la Terre, on trouve un effet similaire. Nous allons voir si Bob a raison.

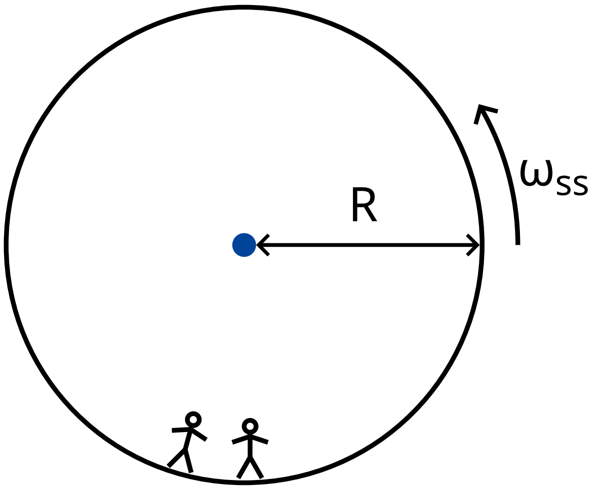

Figure 4 : Station spatiale tournante

B.4	Déterminez l'expression de l'accélération de la pesanteur $g_E(h)$ pour des petites hauteurs h au-dessus de la surface de la Terre et trouvez la pulsation des oscillations $\tilde{\omega}_E$ (une approximation linéaire suffit). Le rayon de la Terre est noté R_E. On négligera la rotation de la Terre.	0.8pt

En effet, dans la station spatiale, Alice trouve bien que le pendule à ressort oscille à la fréquence que Bob a prédite.

B.5	Pour quelle rayon R de la station spatiale, la pulsation ω est-elle la même que la pulsation $\tilde{\omega}_E$ à la surface de la Terre ? Donnez votre réponse en fonction de R_E.	0.3pt

Exaspérée par l'entêtement de Bob, Alice pense alors à une autre expérience pour démontrer son interprétation. Pour cela, elle grimpe sur une tour de hauteur H au dessus du sol de la station spatiale et laisse tomber une masse. Cette expérience peut s'entendre dans le référentiel tournant aussi bien que dans un référentiel d'inertie.

Dans un référentiel tournant, les astronautes sont soumis à une force fictive appelée force d'inertie de Coriolis. Cette force $\vec{F}_C$ agissant sur un objet de masse m se déplaçant à vitesse $\vec{v}$ dans un référentiel tournant avec une pulsation $\vec{\omega}_{ss}$ est donnée par :

$$\vec{F}_C = 2m\vec{v} \wedge \vec{\omega}_{ss} \; . \qquad (2)$$

Vous pouvez préférer utiliser la quantité scalaire :

$$F_C = 2mv\omega_{ss} \sin\phi \qquad (3)$$

où ϕ est l'angle entre le vecteur vitesse et l'axe de rotation. La force est perpendiculaire à la fois à la vitesse $\vec{v}$ et à l'axe de rotation. Le sens de la force peut être déterminé par la règle de la main droite mais, dans tout ce qui suit, vous pourrez le choisir librement.

B.6	Calculez la vitesse horizontale v_x et le déplacement horizontal d_x, par rapport au bas de la tour et dans une direction perpendiculaire à celle-ci, de la masse au moment où elle frappe le sol. Vous pourrez considérer que la hauteur H de la tour est faible, ce qui fait que l'accélération mesurée par les astronautes est constante durant la chute. Vous pourrez aussi admettre que : $d_x \ll H$.	1.1pt

Pour obtenir un bon résultat, Alice décide de refaire cette expérience d'une tour bien plus haute que précédemment. À sa surprise, la masse frappe le sol en bas de la tour, de sorte que $d_x = 0$.

B.7	Déterminez la limite inférieure de la hauteur de la tour nécessaire pour avoir $d_x = 0$.	1.3pt

Alice veut faire une dernière tentative pour convaincre Bob. Elle veut utiliser son oscillateur à ressort pour démontrer l'effet de la force de Coriolis. Pour cela, elle change la construction de départ : elle attache le ressort à un anneau qui peut glisser librement sur une barre horizontale dans la direction x sans friction. Le ressort lui-même vibre dans la direction y. La barre est parallèle au sol et perpendiculaire à l'axe de rotation de la station spatiale. Le plan xy est ainsi perpendiculaire à l'axe de rotation, la direction y pointant vers le centre de rotation de la station.

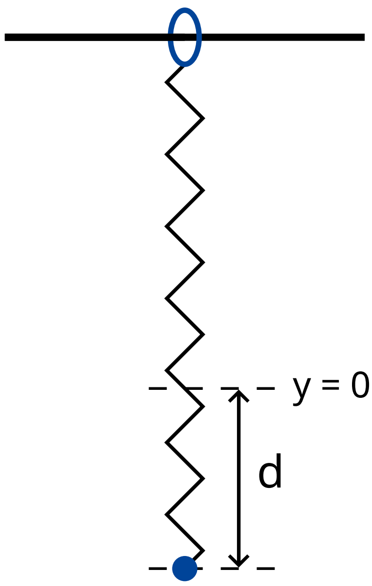

Figure 4 : Construction.

B.8	Alice tire la masse vers le bas à une distance d du point d'équilibre $x = 0$, $y = 0$, puis la relâche (voir figure 5). • Donnez une expression algébrique de $x(t)$ et $y(t)$. Vous pourrez supposer que $\omega_{ss}d$ est faible et négliger la force de Coriolis du mouvement selon l'axe y. • Dessinez l'allure de la trajectoire $(x(t), y(t))$, en y ajoutant toutes les caractéristiques importantes telles que l'amplitude.	1.7pt

Alice et Bob continuent à débattre.