Dva problema iz mehanike

Molimo vas pročitajte opće upute koje se nalaze u odvojenoj omotnici prije nego započnete s ovim zadatkom.

Dio A. Skriveni disk (3.5 bodova)

Razmatramo puni drveni valjak polumjera r_1 i debljine h_1. Negdje u drvenom valjku, drvo je zamijenjeno metalnim diskom polumjera r_2 i debljine h_2. Metalni disk je postavljen tako da mu je os simetrije B paralelna s osi simetrije S drvenog valjka te je postavljen tako da su udaljenosti diska od gornje i donje strane drvenog valjka jednake. Udaljenost između S i B označavamo s d. Gustoća drveta je ρ_1, gustoća metala je $\rho_2 > \rho_1$. Ukupna masa drvenog valjka s metalnim diskom unutar iznosi M.

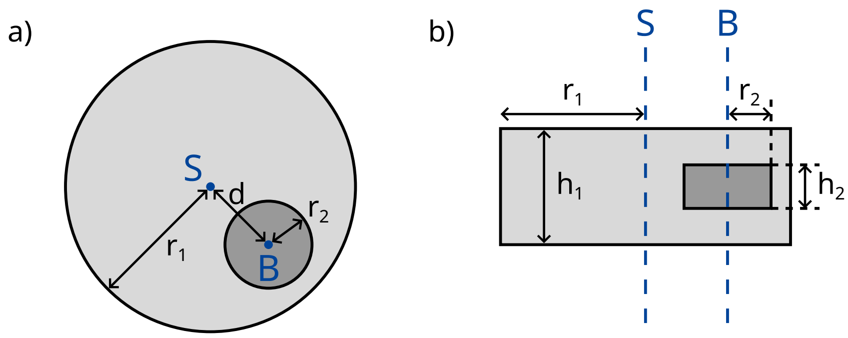
U ovom zadatku postavljamo drveni valjak na pod tako da se može slobodno kotrljati ulijevo i udesno. Vidi Sliku 1 za bočni prikaz i prikaz odozgo.

Cilj ovog zadatka je odrediti veličinu i položaj metalnog diska.

U onome što slijedi, kad se od vas traži da izraziti rezultat pomoću poznatih veličina, smijete pretpostaviti da vam je sljedeće veličine poznate:

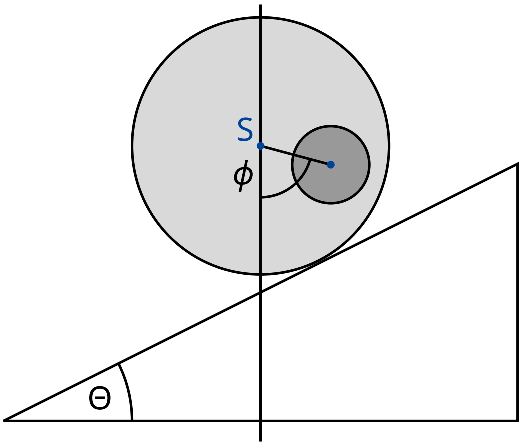
$$r_1,\ h_1,\ \rho_1,\ \rho_2, M\ . \tag{1}$$

Cilj je odrediti r_2, h_2 i d, preko neizravnih mjerenja.



Slika 1: a) bočni prikaz b) prikaz odozgo

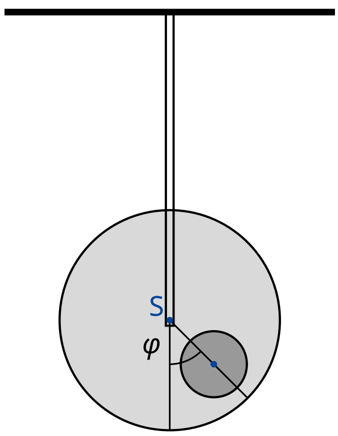
S b označavamo udaljenost između centra mase C cijelog sustava i osi simetrije drvenog valjka, S. Kako bismo odredili ovu udaljenost, osmislili smo sljedeći eksperiment: Drveni valjak postavimo na vodoravnu podlogu tako da je u stabilnoj ravnoteži. Polako naginjemo podlogu za kut Θ (vidi Sliku 2). Zbog statičkog trenja, drveni valjak se može kotrljati bez klizanja. Malo će se otkotrljati niz kosinu, onda će se zaustaviti u stabilnoj ravnoteži nakon što se zarotirao za kut ϕ koji mjerimo.



Slika 2: Valjak na nakošenoj podlozi.

A.1	Pronađite izraz za b kao funkciju veličina (1), kuta ϕ i kuta nakošenja podloge Θ.	0.8pt

Od sada pa na dalje možemo pretpostaviti da nam je veličina b poznata.



Slika 3: Obješeni sustav.

Sada želimo izmjeriti moment tromosti I_S sustava u odnosu na os simetrije S. Iz tog razloga, objesimo drveni valjak za čvrsti štap koji je pričvršćen za os simetrije valjka. Tada ga zakrenemo iz ravnotežnog položaja za mali kut φ te ga pustimo. Vidi Sliku 3 za ovaj postav. Vidimo da φ ima periodičko ponašanje s periodom T.

A.2	Nađite jednadžbu gibanja za φ. Izrazite moment tromosti I_S sustava u odnosu na njegovu os simetrije S koristeći T,b i poznate veličine (1). Smijete pretpostaviti malo odmicanje od ravnotežnog položaja, tako da je φ uvijek jako maleno.	0.5pt

Iz mjerenja u zadatcima **A.1** i **A.2** sada želimo odrediti oblik i položaj metalnog diska unutar drvenog valjka.

A.3	Pronađite izraz da udaljenost d kao funkciju od b i veličina (1). Smijete također koristiti r_2 te h_2 kao varijable u svom izrazu jer će se one biti izračunate u podzadatku **A.5**.	0.4pt

A.4	Pronađite izraz za moment tromosti I_S koristeći b i poznate veličine (1). Smijete također koristiti r_2 te h_2 kao varijable u svom izrazu jer će se one biti izračunate u podzadatku **A.5**.	0.7pt

A.5	Koristeći gornje rezultate, zapišite izraz za h_2 i r_2 koristeći b, T i poznate veličine (1). Smijete izraziti h_2 kao funkciju od r_2.	1.1pt

Dio B. Rotirajuća svemirska postaja

Alisa je astronaut i živi u svemirskoj postaji. Svemirska postaja je ogromni kotač radijusa R koji rotira oko svoje osi, stvarajući tako umjetnu gravitaciju astronautima. Astronauti žive na unutarnjoj strani oboda kotača. Gravitacijsko privlačenje svemirske postaje i zakrivljenost poda se može zanemariti.

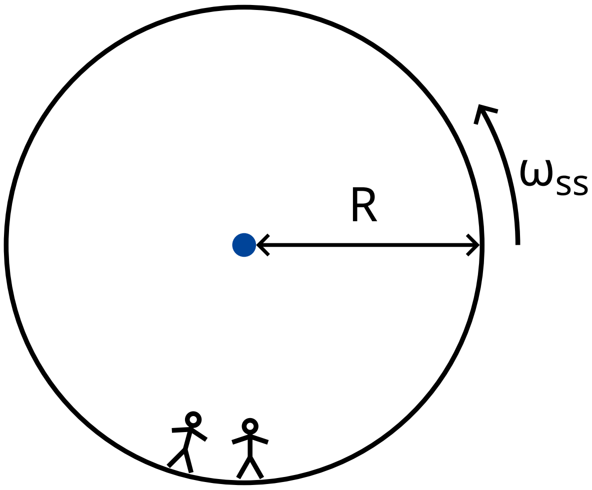
B.1	Kojom se kružnom frekvencijom ω_{ss} svemirska postaja okreće da astronauti osjećaju jednaku gravitaciju g_E kao da se nalaze na Zemljinoj površini?	0.5pt

Alisa i njen prijatelj astronaut Bob imaju raspravu. Bob ne vjeruje da žive na svemirskoj postaji te tvrdi da se nalaze na Zemlji. Koristeći fiziku, Alisa želi pokazati Bobu da ipak žive na rotirajućoj svemirskoj postaji. S time na umu, Alisa pričvrsti masu m za oprugu konstante k i pusti ju da titra. Masa titra samo u okomitom smjeru te se ne može pomicati u vodoravnom smjeru.

B.2	Pretpostavljajući da je gravitacija na Zemlji konstantna s akceleracijom g_E, koliku bi kružnu frekvenciju ω_E izmjerila osoba na Zemlji?	0.2pt

B.3	Koliku kružnu frekvenciju ω mjeri Alisa na svemirskoj postaji?	0.6pt

Alisa je uvjerena da njen odgovor dokazuje da se nalaze na rotirajućoj svemirskoj postaji. No Bob je ostao neuvjeren. On tvrdi da kada se uzme u obzir da se gravitacija mijenja iznad površine Zemlje, moguće je opaziti slične efekte. U sljedećim zadatcima istražujemo je li Bob u pravu.



Slika 4: Svemirska postaja

B.4	Izvedite izraz za gravitaciju $g_E(h)$ na malim visinama h iznad površine Zemlje i izračunajte frekvenciju titranja $\tilde{\omega}_E$ mase koja titra (linearna aproksimacija je dovoljna). Polumjer Zemlje označen je s R_E. Zanemarite rotaciju Zemlje.	0.8pt

Zaista, za ovu svemirsku postaju, Alisa pronađe da opruga titra s frekvencijom koju je Bob predvidio.

B.5	Za koji se polumjer R svemirske postaje frekvencija titranja ω poklapa s frekvencijom titranja $\tilde{\omega}_E$ na Zemlji? Izrazite svoj odgovor pomoću R_E.	0.3pt

Razljućena Bobovom tvrdoglavošću, Alisi padne na pamet eksperiment kojim bi pokazala svoju tvrdnju. U tu svrhu, popne se na toranj visine H iznad poda svemirske postaje i ispusti masu. Eksperiment se može promatrati bilo u rotirajućem referentnom sustavu bilo u inercijalnom referentnom sustavu.

U jednoliko rotirajućem referentnom sustavu, astronauti osjećaju fiktivnu silu $\vec{F}_C$ koja se naziva Coriolisovom silom. Sila $\vec{F}_C$ koja djeluje na predmet mase m koji se giba s brzinom $\vec{v}$ u rotirajućem sustavu sa stalnom kružnom frekvencijom $\vec{\omega}_{ss}$ je dana s

$$\vec{F}_C = 2m\vec{v} \times \vec{\omega}_{ss} \,. \tag{2}$$

Koristeći skalarne veličine smijete koristiti

$$F_C = 2mv\omega_{ss} \sin\phi \,, \tag{3}$$

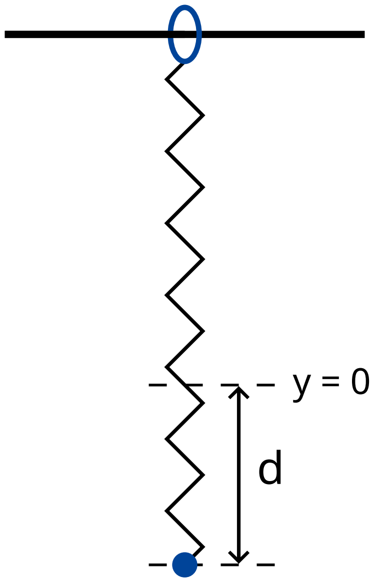
gdje je ϕ kut između brzine i osi rotacije. Sila je okomita i na brzinu v i na os rotacije. Predznak sile se može odrediti pomoću pravila desne ruke, no u onome što slijedi možete ga sami odabrati.

B.6	Izračunajte horizontalnu brzinu v_x i horizontalni pomak d_x (u odnosu na podnožje tornja) mase u trenutku udara o pod. Možete pretpostaviti da je visina tornja H malena, tako da je akceleracija koju mjere astronauti stalna tokom pada. Također, možete pretpostaviti da je $d_x \ll H$.	1.1pt

Da bi dobila dobar rezultat, Alisa odluči provesti eksperiment s puno višljeg tornja nego li prije. Na njeno iznenađenje, masa udari o površinu uz bazu tornja tako da je $d_x = 0$.

B.7	Pronađite donju granicu za visinu tornja za koju se može dogoditi da je $d_x = 0$.	1.3pt

Alisa je voljna još jednom probati uvjeriti Boba. Želi iskoristiti svoj oscilator s oprugom da pokaže efekt Coriolisove sile. Iz tog razloga izmjeni originalni postav: Pričvrsti prsten za oprugu koji može slobodno kliziti po vodoravnom štapu u x smjeru bez trenja. Opruga kao takva titra u y smjeru. Štap je paralelan s podom i okomit na os rotacije svemirske postaje. xy ravnina je time okomita na os rotacije s time da y smjer pokazuje prema centru rotacije postaje.



Slika 5: Postav

B.8	Alisa povuče masu za udaljenost d prema dolje u odnosu na ravnotežnu točku $x = 0$, $y = 0$, i onda ju pusti (vidi Sliku 5). • Napišite algebarski izraz za $x(t)$ i $y(t)$. Smijete pretpostaviti da je $\omega_{ss} d$ maleno i smijete zanemariti Coriolisovu silu za gibanje duž y osi. • Skicirajte putanju $(x(t), y(t))$, pritom označavajući sva bitna svojstva, primjerice poput amplitude.	1.7pt

Alisa i Bob se i dalje svađaju.