

## Két feladat mechanikából (10 pont)

Mielőtt elkezded a feladat megoldását, olvasd el a külön borítékban lévő általános utasításokat!

### Part A. Elrejtett korong (3,5 pont)

Tekintsünk egy tömör, fából készült,  $r_1$  sugarú és  $h_1$  vastagságú hengert. A fahenger belsejében valahol a fa anyaga helyett egy  $r_2$  sugarú és  $h_2$  vastagságú fémkorong található. A fémkorong úgy helyezkedik el, hogy  $B$  szimmetriatengelye párhuzamos a fahenger  $S$  tengelyével, és ugyanakkora távolságra van a fahenger alsó és felső alaplapjától. Jelöljük  $S$  és  $B$  távolságát  $d$ -vel! A fa sűrűsége  $\rho_1$ , a fém sűrűsége pedig  $\rho_2 > \rho_1$ . A fahenger és a fémkorong össztömege  $M$ .

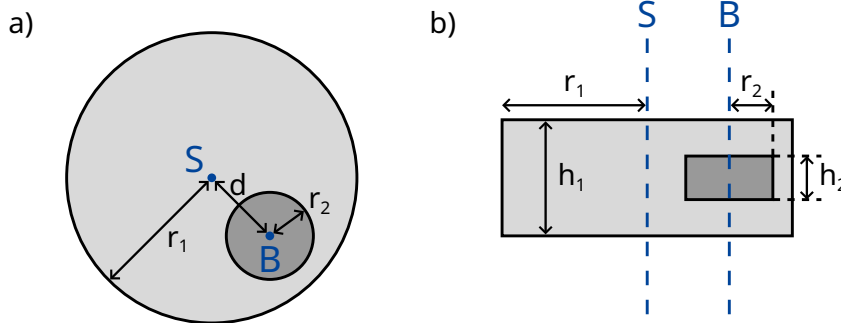
Ebben a részben a fahengert a földre helyezzük, így jobbra és balra szabadon tud gördülni. Az elrendezés oldal- és felülnézetben az 1. ábrán látható.

Ebben a feladatban a fémkorong méretét és helyét kell meghatározni.

A következőkben, ha a választ az ismert mennyiségekkel kell kifejezned, mindig a következőket vedd ismertnek:

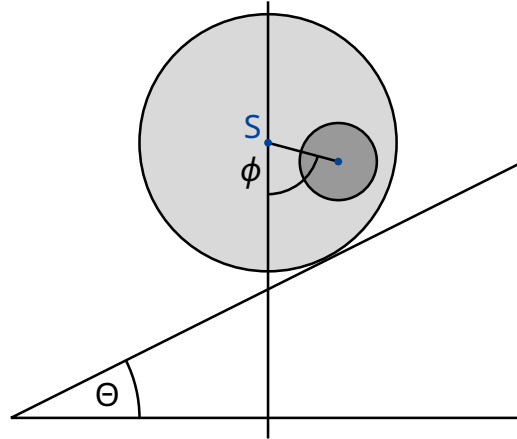
$$r_1, h_1, \rho_1, \rho_2, M. \quad (1)$$

A cél  $r_2, h_2$  és  $d$  meghatározása indirekt méréseken keresztül.



1. ábra: a) oldalnézet b) felülnézet

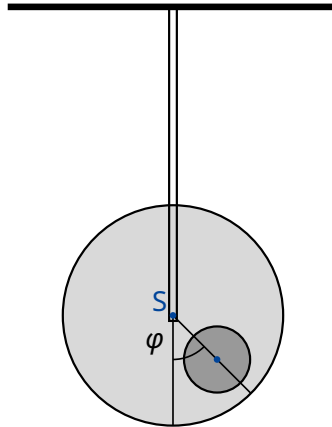
Jelöljük  $b$ -vel a teljes rendszer  $C$  tömegközéppontjának és a fahenger  $S$  szimmetriatengelyének távolságát! Ennek a távolságnak a meghatározásához a következő kísérletet tervezzük: a fahengert vízszintes alapra helyezzük úgy, hogy stabil egyensúlyban legyen. Az alapot lassan megdöntjük  $\Theta$  szöggel (lásd a 2. ábrát). A tapadási súrlódás miatt a fahenger csúszás nélkül gördülhet. Egy kicsit lejjebb gördül a lejtőn, de végül a stabil egyensúlyi helyzetben megáll  $\phi$  szögelfordulás után, amit megmérünk.



2. ábra: A henger a lejtőn.

**A.1** Fejezd ki  $b$ -t az (1) mennyiségek, a  $\phi$  szög és a  $\Theta$  hajlásszög függvényében! 0.8pt

Mostantól fogva feltételezhetjük, hogy  $b$  értéke ismert.



3. ábra: Felfüggesztett rendszer.

Következőként szeretnénk megmérni a rendszer  $I_S$  tehetetlenségi nyomatékát az  $S$  szimmetriatengelyre vonatkoztatva. Ehhez egy mereven rögzített rúddal felfüggesztjük a fahengert a szimmetriatengelyénél. Ezután az egyensúlyi helyzetéből kicsiny  $\varphi$  szöggel kitérítjük, majd elengedjük. Az elrendezést lásd a 3. ábrán. Azt találjuk, hogy  $\varphi$  periodikusan változik  $T$  periódusidővel.

**A.2** Határozd meg  $\varphi$  mozgásegyenletét! Fejezd ki a henger  $I_S$  tehetetlenségi nyomatékát az  $S$  szimmetriatengelyére nézve  $T$ ,  $b$  és az (1) ismert mennyiségek segítségével! Feltételezheted, hogy az egyensúlyi helyzettől való kitérés kicsi, így  $\varphi$  végig igen kicsiny, 0.5pt

Az **A.1** és **A.2** részfeladatok mérései alapján szeretnénk meghatározni a fahengerben található fémkorong geometriáját és elhelyezkedését.

**A.3** Fejezd ki a  $d$  távolságot  $b$  és az (1) mennyiségek segítségével. A formuládban az  $r_2$  és  $h_2$  mennyiségeket is használhatod, hiszen ezek a mennyiségek az **A.5** pontban meg lesznek határozva. 0.4pt

**A.4** Fejezd ki az  $I_S$  tehetetlenségi nyomatékot  $b$  és az ismert (1) mennyiségek segítségével. A formuládban az  $r_2$  és  $h_2$  mennyiségeket is használhatod, hiszen ezek a mennyiségek az **A.5** pontban meg lesznek határozva. 0.7pt

**A.5** A fenti eredményeket felhasználva fejezd ki  $h_2$  és  $r_2$  értékét  $b$ ,  $T$  és az ismert (1) mennyiségek segítségével. A  $h_2$  mennyiséget kifejezheted  $r_2$ -vel is. 1.1pt

## Part B. Forgó űrállomás (6,5 pont)

Alice egy űrállomáson lakó űrhajós. Az űrállomás egy óriási,  $R$  sugarú kerék, amely a tengelye körül forog, így biztosítva a mesterséges gravitációt az asztronauták számára. Az űrhajósok a kerék peremének belső oldalán élnek. Az űrállomás gravitációs vonzása és a padló görbültsége elhanyagolható.

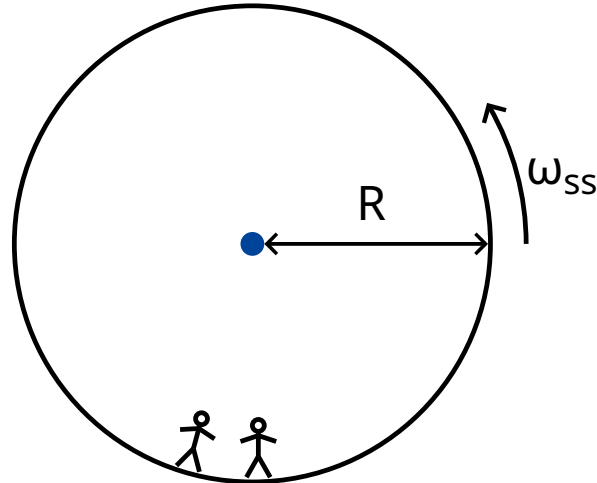
**B.1** Mekkora  $\omega_{ss}$  szögsebességgel forog az űrállomás, ha az űrhajósok ugyanakkora  $g_E$  gravitációs gyorsulást éreznek, mint a Föld felszínén? 0.5pt

Alice és űrhajós barátja, Bob vitatkoznak. Bob nem hiszi el, hogy valóban egy űrállomáson élnek, szerinte valójában a Földön. Alice fizikai módszerrel szeretné bebizonyítani Bobnak, hogy egy forgó űrállomáson élnek. Ezért egy  $m$  tömegű testet rögzít egy  $k$  rugóállandójú rugó végére, majd rezgésbe hozza. A test csak függőleges irányban rezeghet, vízszintesen nem tud mozogni.

**B.2** Feltételezve, hogy a Földön a gravitációs gyorsulás állandó  $g_E$ , mekkorának mérné a rezgés  $\omega_E$  körfrekvenciáját egy Földön lévő személy? 0.2pt

**B.3** Mekkora  $\omega$  körfrekvenciát mér Alice az űrállomáson? 0.6pt

Alice meg van győződve arról, hogy a kísérlete bizonyíték arra, hogy egy forgó űrállomáson élnek. Bob szkeptikus marad. Szerinte ha a gravitációs tér Föld felszíne feletti változását is figyelembe vesszük, annak hasonló hatása van. A továbbiakban azt vizsgáljuk, igaza van-e Bobnak.



4. ábra: Az űrállomás

- B.4** Fejezd ki a  $g_E(h)$  gravitációs gyorsulást kicsiny  $h$  magasságban a Föld felszíne fölött, és számítsd ki a rezgő test  $\tilde{\omega}_E$  körfrekvenciáját (elég a lineáris közelítés). A Föld sugarát jelölje  $R_E$ . A Föld forgását hanyagold el! 0.8pt

Alice azt találja, hogy ezen az űrállomáson a rezgő test valóban a Bob által jóslott frekvenciával rezeg.

- B.5** Mekkora az űrállomás  $R$  sugara, ha a rezgés  $\omega$  körfrekvenciája megegyezik a Földön mérhető  $\tilde{\omega}_E$  körfrekvenciával? Válaszodat  $R_E$  segítségével add meg. 0.3pt

Bob makacsságán feldühödve Alice egy új kísérlettel áll elő saját igazának bizonyítására. Ezért felmászik az űrállomás padlója fölé  $H$  magasságba egy toronyra, és elejt egy testet. Ez a kísérlet értelmezhető a forgó vonatkoztatási rendszerben éppúgy, mint az inerciarendszerben.

Egy egyenletesen forgó vonatkoztatási rendszerben az űrhajós egy fiktív  $\vec{F}_C$  erőt tapasztal, amit Coriolis-erőnek nevezünk. Az állandó  $\vec{\omega}_{ss}$  szögsebességgel forgó rendszerben  $\vec{v}$  sebességgel mozgó,  $m$  tömegű testre ható  $\vec{F}_C$  Coriolis-erőt a következő összefüggés adja meg:

$$\vec{F}_C = 2m\vec{v} \times \vec{\omega}_{ss}. \quad (2)$$

Használhatod a skaláris mennyiségekre vonatkozó

$$F_C = 2mv\omega_{ss} \sin \phi, \quad (3)$$

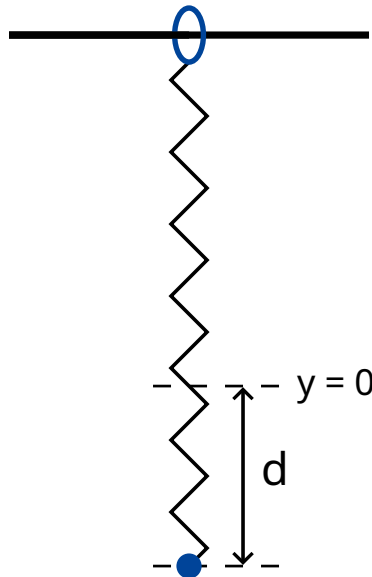
alakot, ahol  $\phi$  a sebességvektor és a forgástengely közötti szög. Az erő merőleges mind a  $v$  sebességvektorra, mind pedig a forgástengelyre. Az erő előjele a jobbkézsabály alapján határozható meg, de a következőkben szabadon választhatod.

- B.6** Számítsd ki a test  $v_x$  vízszintes sebességét és a vízszintes  $d_x$  elmozdulását (a torony aljához képest, a toronyra merőleges irányban) a padlót érés pillanatában. Felteheted, hogy a torony  $H$  magassága kicsiny, így az űrhajósok által mért gyorsulás az esés alatt állandó. Feltételezheted továbbá, hogy  $d_x \ll H$ . 1.1pt

Hogy jobb eredményt kapjon, Alice úgy dönt, hogy a kísérletet egy, a korábbinál sokkal magasabb toronyról is elvégzi. Meglepetésére a test a torony aljánál éri el a padlót, azaz  $d_x = 0$ .

**B.7** Határozd meg a torony magasságának alsó korlátját, amelyre  $d_x = 0$  lehetséges. 1.3pt

Alice szeretne még egy utolsó kísérletet tenni Bob meggyőzésére. A rugós rendszert szeretné használni a Coriolis-erő hatásának szemléltetésére. Ezért megváltoztatja az eredeti elrendezést: a rugót egy olyan gyűrűhöz rögzíti, amely szabadon és súrlódásmentesen csúszhat az  $x$  irányban egy vízszintes rúdon. A rugó maga az  $y$  irányban rezeg. A rúd párhuzamos a talajjal és merőleges az űrállomás forgástengelyére. Az  $xy$  sík tehát merőleges a forgástengelyre, az  $y$  irány pedig egyenesen az űrállomás forgástengelye felé mutat.



5. ábra: Az elrendezés.

**B.8** Alice a testet az  $x = 0, y = 0$  egyensúlyi állapotából  $d$  távolsággal kitéríti lefelé, majd elengedi (lásd az 5. ábrát). 1.7pt

- Fejezd ki az  $x(t)$  és  $y(t)$  mennyiségeket. Felteheted, hogy  $\omega_{ss}d$  kicsi, és hanyagold el az  $y$  irányú Coriolis-erőt.
- Vázold fel az  $(x(t), y(t))$  pályát, és jelöld minden fontos tulajdonságát, mint pl. az amplitúdó.

Alice és Bob folytatja vitáját.