

Dua Soal dalam Mekanika (10 poin)

Sebelum kalian mengerjakan soal ini, bacalah terlebih dahulu Instruksi Umum yang ada pada amplop terpisah.

Bagian A. The Hidden Disk (3.5 points)

Kita tinjau sebuah silinder kayu pejal dengan jari-jari r_1 dan tebal h_1 . Di bagian tertentu di dalam silinder tersebut, bahan kayunya dibuang lalu diganti dengan sebuah piringan logam berjari-jari r_2 dan tebal h_2 . Piringan logam tersebut diletakkan di posisi tersebut sedemikian rupa sehingga sumbu simetri piringan logam B paralel dengan sumbu simetri silinder kayu S . Piringan logam diletakkan pada posisi dimana kedua permukaan piringan tersebut berjarak sama dari permukaan atas dan bawah silinder kayu. Diketahui jarak antara sumbu S dan sumbu B adalah d . Massa jenis kayu adalah ρ_1 , dan masa jenis logam $\rho_2 > \rho_1$. Massa total silinder kayu yang berisi piringan logam adalah M .

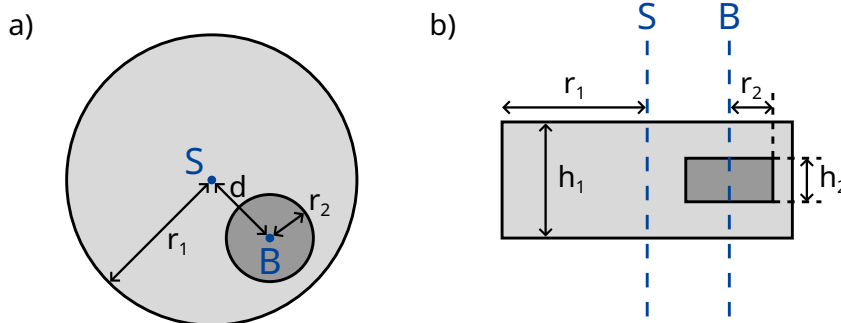
Dalam bagian ini, silinder kayu tadi diletakkan di atas lantai sehingga dia dapat menggelinding ke kiri dan ke kanan secara bebas. Gambar 1 memperlihatkan tampak samping dan tampak atas untuk sistim silinder tadi.

Maksud dari soal ini adalah kamu akan menentukan ukuran dan posisi piringan logam yang tersembunyi tersebut.

Untuk selanjutnya, apabila kamu diminta untuk menyajikan hasil perhitungan dalam besaran-besaran yang diketahui, maka anggap saja besaran-besaran berikut sudah diketahui, yaitu :

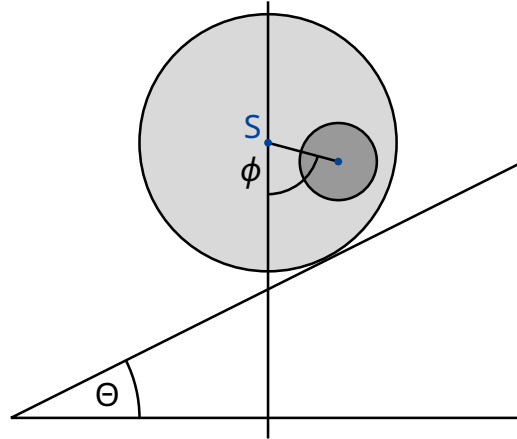
$$r_1, h_1, \rho_1, \rho_2, M. \quad (1)$$

Jadi tujuan soal ini adalah kamu akan menentukan r_2, h_2 dan d , melalui pengukuran secara tak langsung.



Gambar 1: a) tampak samping, b) tampak dari atas

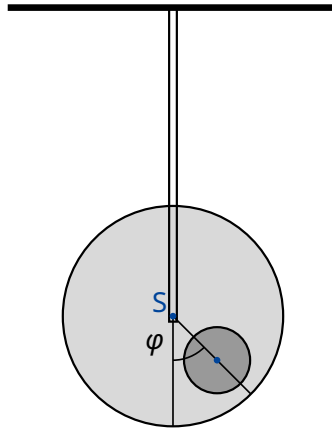
Diketahui b adalah jarak antara titik pusat massa sistem C dengan sumbu simetri S dari silinder kayu. Untuk menentukan besar jarak tersebut, kita lakukan eksperimen sbb: Silinder kayu tadi kita letakkan di atas landasan horizontal sedemikian rupa sehingga silinder berada dalam kesetimbangan stabil. Sekarang landasan horizontal tersebut kita naikkan kemiringannya secara perlahan-lahan hingga sudut θ (lihat Gambar 2). Karena adanya gesekan statis, silinder dapat menggelinding secara bebas tanpa slip. Silinder akan bergulir di bidang miring sedikit saja, menggelinding sejauh sudut ϕ yang dapat kita ukur, kemudian ia berhenti/diam dalam kesetimbangan stabil.



Gambar 2: Silinder setimbang di atas sebuah bidang miring.

A.1 Turunkan persamaan untuk b , dinyatakan dalam besaran-besaran yang diberikan dalam pers. (1) di atas, sudut ϕ dan sudut kemiringan bidang θ . 0.8pt

Mulai dari sini kamu sekarang sudah boleh menganggap bahwa nilai b sudah diketahui.



Gambar 3: Sistem yang tergantung

Selanjutnya kamu diminta menentukan momen inersia sistem I_S terhadap sumbu simetri S . Caranya adalah dengan menggantung silinder kayu tadi pada titik gantung di sumbu simetrinya dengan menggunakan tongkat pejal. Selanjutnya silinder tersebut diputar dari posisi setimbangnya sejauh sudut kecil φ , kemudian silinder tersebut dilepaskan. Susunan sistem silinder yang tergantung ini diperlihatkan dalam Gambar 3. Kita temukan bahwa silinder kayu melakukan gerak rotasi periodik dengan simpangan sudut φ dan periode T .

- A.2** Turunkan persamaan gerak untuk φ . Tentukan momen inersia sistem I_S terhadap sumbu silinder S dinyatakan dalam T , b dan besaran-besaran yang diketahui dalam pers. (1). Dalam menjawab soal ini kamu boleh mengasumsikan bahwa sudut simpangan φ selalu sangat kecil. 0.5pt

Dari pengukuran-pengukuran yang dilakukan dalam pertanyaan-pertanyaan **A.1** dan **A.2** di atas, sekarang kita ingin menentukan parameter geometri dan posisi piringan logam yang tersembunyi di dalam silinder kayu.

- A.3** Turunkan persamaan untuk jarak d sebagai fungsi dari b dan besaran-besaran yang diberikan dalam pers. (1). Kamu juga boleh menggunakan variabel-variabel r_2 dan h_2 di dalam jawaban kamu ini karena ia akan diminta dihitung lagi dalam pertanyaan **A.5**. 0.4pt

- A.4** Turunkan persamaan untuk momen inersia I_S dinyatakan dalam b dan besaran-besaran yang diberikan dalam pers. (1). Kamu juga boleh menggunakan variabel-variabel r_2 dan h_2 di dalam jawaban kamu ini karena ia akan diminta dihitung lagi dalam pertanyaan **A.5**. 0.7pt

- A.5** Dengan menggunakan semua hasil di atas, turunkan persamaan untuk h_2 dan r_2 dinyatakan dalam b , T , dan besaran-besaran yang diberikan dalam pers. (1). Kamu juga boleh menyatakan h_2 sebagai fungsi dari r_2 . 1.1pt

Bagian B. Rotasi Stasiun Ruang Angkasa (6.5 poin)

Alice adalah seorang astronot yang hidup dalam sebuah stasiun ruang angkasa (*space station*). *Space station* tersebut berbentuk roda (*wheel*) raksasa dengan jari-jari R yang berotasi mengitari sumbu sendiri sehingga menimbulkan gravitasi buatan (*artificial gravity*) bagi para astronot. Para astronot tersebut berada pada sisi bagian dalam dari tepian roda. Gaya tarik gravitasi *space station* dan kelengkungan lantainya dapat diabaikan.

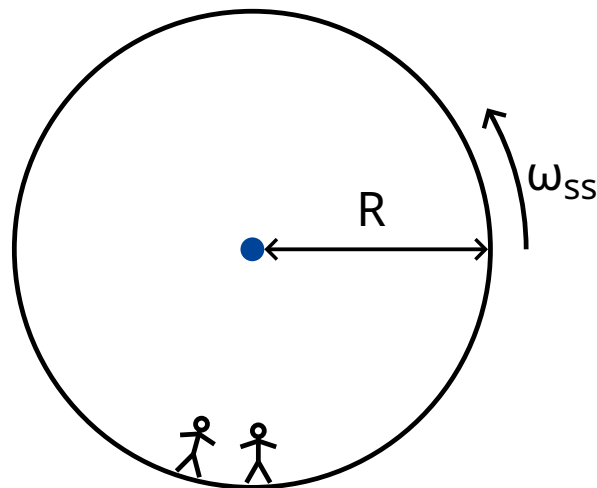
- B.1** Tentukan nilai frekuensi sudut ω_{ss} *space station* agar para astronot tersebut masih mengalami gravitasi g_E yang sama seperti kalau mereka sedang berada di permukaan Bumi. 0.5pt

Alice dan teman astronotnya, Bob, sedang berdebat. Bob tidak percaya dengan fakta bahwa mereka sedang hidup dalam sebuah *space station* dan tetap mengklaim bahwa mereka sedang berada di permukaan Bumi. Alice ingin membuktikan pada Bob dengan menggunakan ilmu fisika kalau sesungguhnya mereka benar-benar sedang hidup dalam sebuah *space station* yang berotasi. Untuk maksud tersebut Alice lalu mengikatkan sebuah massa m pada sebuah pegas dengan konstanta pegas k dan membiarkan pegas tersebut berosilasi. Massa tersebut hanya dapat berosilasi pada arah vertikal, dan tidak dapat bergerak ke arah horizontal (mendatar).

- B.2** Kalau dianggap bahwa di permukaan Bumi gravitasi adalah konstan dengan percepatan g_E , hitung besar frekuensi sudut osilasi massa ω_E yang terukur oleh orang di permukaan Bumi. 0.2pt

B.3 Tentukan frekuensi sudut osilasi massa tadi ω yang terukur oleh Alice di dalam *space station* ? 0.6pt

Alice meyakini bahwa eksperimennya di atas telah dapat memberikan bukti pada Bob bahwa mereka benar-benar sedang berada di sebuah *space station* yang berotasi. Sementara itu Bob masih tetap bersikap skeptis dengan mengklaim bahwa efek seperti itu dapat pula diperoleh bila perubahan dalam gravitasi di atas permukaan Bumi ikut diperhitungkan. Selanjutnya di bawah ini kamu akan mencari tahu apakah Bob benar atau salah.



Gambar 4: *Space station*

B.4 Turunkan persamaan untuk gravitasi $g_E(h)$ di ketinggian kecil h di atas permukaan Bumi, lalu hitung frekuensi sudut osilasi massa sekarang yaitu $\tilde{\omega}_E$ (cukup gunakan pendekatan linear). Diketahui jari-jari Bumi adalah R_E . Abaikan rotasi Bumi. 0.8pt

Sesungguhnya untuk *space station* tersebut Alice menemukan bahwa bandul pegas tadi memang berosilasi dengan frekuensi yang sudah diprediksi oleh Bob.

B.5 Hitung besar jari-jari R dari *space station* tersebut agar frekuensi osilasi massa ω sama persis dengan frekuensi osilasi massa $\tilde{\omega}_E$ yang terukur di permukaan Bumi. Nyatakan jawaban kamu dalam R_E . 0.3pt

Karena sudah jengkel dengan sikap keras kepalanya Bob, Alice lalu melakukan eksperimen lagi supaya dapat mempertahankan pendiriannya. Maka untuk maksud tersebut Alice kemudian menaiki sebuah menara (*tower*) dengan ketinggian H di atas lantai *space station* dan lalu menjatuhkan sebuah massa. Kejadian dalam eksperimen ini dapat difahami, baik dalam kerangka acuan yang berotasi maupun dalam kerangka acuan inersial.

Dalam suatu kerangka acuan yang berotasi beraturan, para astronot tadi merasakan adanya suatu gaya fiktif \vec{F}_C yang dinamakan gaya Coriolis. Gaya \vec{F}_C yang bekerja pada suatu benda dengan massa m yang bergerak dengan kecepatan \vec{v} menurut suatu kerangka acuan yang berotasi dengan frekuensi sudut

konstan $\vec{\omega}_{ss}$ diberikan oleh persamaan

$$\vec{F}_C = 2m\vec{v} \times \vec{\omega}_{ss} . \quad (2)$$

Bila diungkapkan dalam besaran-besaran skalarnya maka kamu dapat menggunakan persamaan

$$F_C = 2mv\omega_{ss} \sin \phi , \quad (3)$$

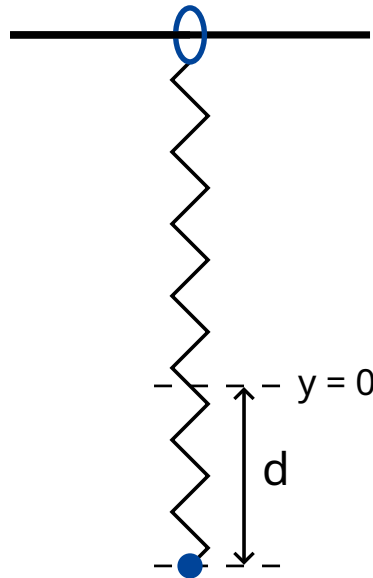
dimana ϕ adalah sudut antara vektor kecepatan dengan sumbu rotasinya. Gaya tadi tegak lurus pada kecepatan v dan pada sumbu rotasi. Sementara itu arah gaya dapat ditentukan dengan menggunakan kaidah tangan putar kanan, tetapi untuk selanjutnya kamu bebas memilihnya.

- B.6** Hitung kecepatan horizontal v_x dan pergeseran horizontal d_x (relatif terhadap lantai dasar menara pada arah tegak lurus menara) dari massa tersebut sesaat setelah ia menumbuk lantai tersebut. Kamu boleh berasumsi bahwa tinggi menara H cukup kecil sehingga percepatan yang diukur para astronot tadi bersifat konstan sepanjang gerak jatuhnya massa tersebut. Kamu juga boleh mengasumsikan bahwa $d_x \ll H$. 1.1pt

Untuk memperoleh hasil yang bagus, Alice memutuskan untuk melakukan eksperimen sebelumnya tapi dari menara yang jauh lebih tinggi dari menara sebelumnya. Dan Alice dikejutkan dengan hasil bahwa massa tadi ternyata menyentuh lantai persis di dasar menara sehingga $d_x = 0$.

- B.7** Tentukan nilai batas bawah (*lower bound*) untuk ketinggian menara agar kejadian yang mengejutkan Alice di atas dapat berlangsung, yaitu kejadian bahwa $d_x = 0$. 1.3pt

Alice masih berkeinginan memperlihatkan satu bukti lagi untuk lebih meyakinkan Bob. Dia kemudian ingin tetap memakai osilator pegasnya tapi sekarang dibawah pengaruh gaya Coriolis. Untuk mencapai maksudnya tersebut maka Alice mengubah susunan awal menjadi sbb: dia lengkapi ujung bebas pegasnya dengan sebuah cincin (lihat gambar di bawah) yang membuat pegas tersebut menjadi dapat bergeser secara bebas tanpa gesekan sepanjang tongkat horizontal pada arah x . Sementara pegasnya sendiri hanya akan berosilasi pada arah y . Tongkat tadi sejajar dengan posisi lantai *space station* dan tegak lurus terhadap sumbu rotasi *space station* nya. Bidang xy dengan demikian tegak lurus pada sumbu rotasi tadi, dengan sumbu y mengarah langsung/lurus ke titik pusat rotasi dari *space station* tadi.



Gambar 5: Susunan eksperimen.

- B.8** Alice menarik titik massa tersebut ke arah bawah sejauh d dari titik kesetimbangannya $x = 0, y = 0$, lalu melepaskannya lagi (lihat Gambar 5). 1.7pt
- Tentukan rumus atau persamaan aljabar untuk $x(t)$ dan $y(t)$. Kamu boleh mengasumsikan bahwa nilai $\omega_{ss}d$ kecil dan bahwa gaya Coriolis boleh diabaikan untuk gerak sepanjang sumbu- y .
 - Buatlah skets lintasan $(x(t), y(t))$ untuk massa tersebut, dan tandailah atau tuliskanlah semua bagian yang kamu pandang penting untuk diketahui pada skets tersebut, misalnya amplitudonya.

Alice dan Bob masih melanjutkan perdebatannya.