Dos Problemas en Mecánica (10 points)

Por favor asegúrese de leer las instrucciones generales dentro del sobre adjunto antes de comenzar a resolver este problema.

Parte A. El Disco Escondido (3.5 points)

Consideramos un cilindro de madera de radio r_1 y grosor w_1. En algún lugar dentro del cilindro hay un disco de metal de radio r_2 y grosor w_2. El disco de metal está ubicado de tal forma que su eje de simetría B se ubica paralelo al eje de simetría S del cilindro de madera. El disco de metal se coloca en la misma distancia de la cara superior y la parte inferior del cilindro. Denotamos la distancia entre S y B como d. La densidad de la madera es ρ_1, mientras que de la del metal es $\rho_2 > \rho_1$. La masa total del cilindro de madera con el disco dentro es M.

En esta tarea ubicamos el cilindro sobre una base horizontal de tal forma que pueda rodar libremente hacia la izquierda y la derecha. Vea la Figura 1 para una vista lateral y superior del montaje.

El objetivo de la tarea es determinar el tamaño y posición del disco de metal.

En lo que sigue, cuando se le pida expresar el resultado en términos de cantidades conocidas, puede asumir que las cantidades conocidas son:

$$r_1,\ w_1,\ \rho_1,\ \rho_2, M\ . \tag{1}$$

El objetivo es determinar r_2, w_2 y d, a través de mediciones indirectas.

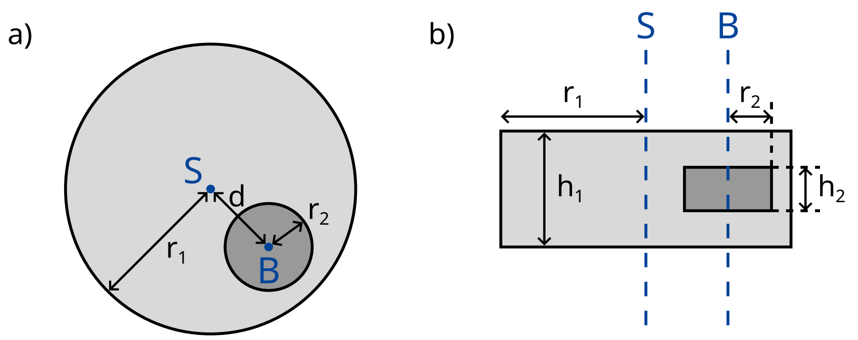

Figura 1: a) vista lateral b) vista superior.

b es la distancia entre el centro de masa C de todo el sistema y el eje de simetría S del cilindro. Para determinar esta distancia, diseñamos el siguiente experimento: ubicamos el cilindro sobre una base horizontal de manera que se halle en equilibrio estable. Ahora inclinamos la base lentamente hasta formar un ángulo Θ con la horizontal (ver Fig. 2). Como resultado de la fricción estática, el cilindro puede rodar libremente sin deslizar. Este va a rodar una poco hacia abajo, pero luego va a detenerse en un equilibrio estable. Se medirá la rotación de un ángulo ϕ.

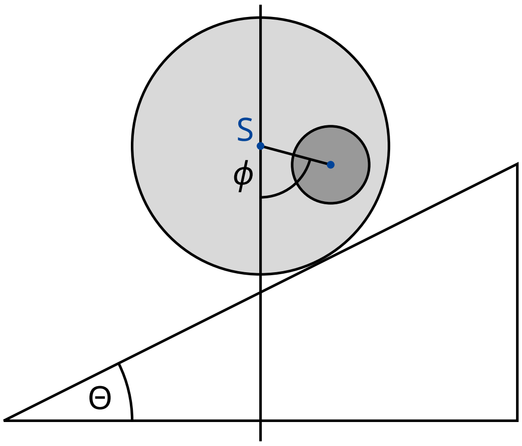

Figura 2: Cilindro sobre base inclinada.

A.1	Encuentre una expresión para b como función de las cantidades (1), el ángulo ϕ y el ángulo de inclinación de la base Θ .	0.8pt

Desde ahora asumiremos que el valor de b es conocido.

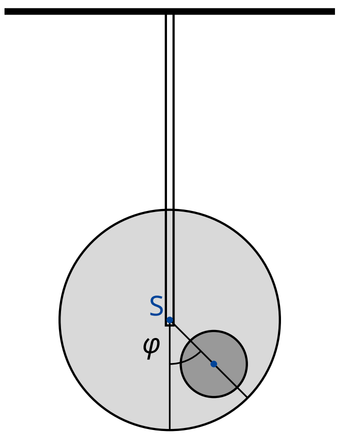

Figura 3: Cilindro suspendido

A continuación queremos medir el momento de inercia I_S del cilindro con respecto al eje de simetría S. Con este objetivo suspendemos el cilindro de su eje de simetría. Luego lo giramos ligeramente de su posición de equilibrio en un ángulo ϕ y lo soltamos. Vea la figura 3 para el montaje. Encontramos que ϕ describe un movimiento periódico con período T.

A.2	¿Qué movimiento describe ϕ? Exprese el momento de inercia I_S del cilindro alrededor de su eje de simetría S en términos de T, b y las cantidades conocidas (1). Puede asumir que solo perturbamos el equilibrio ligeramente, de tal forma que ϕ siempre es pequeño.	0.5pt

Partiendo de las mediciones de las preguntas **A.1** y **A.2**, queremos determinar la geometría y la posición del disco de metal dentro del cilindro.

A.3	Encuentre una expresión para la distancia d como función de b y las cantidades (1). También puede incluir r_2 y w_2 como variables en su expresión, ya que se calculan en **A.5** subtarea.	0.4pt

A.4	Encuentre una expresión para el momento de inercia I_S en términos de b y las cantidades conocidas (1). También puede incluir r_2 y w_2 como variables en su expresión, ya que se calculan en **A.5** subtarea.	0.7pt

A.5	Usando todos los resultados anteriores, escriba una expresión para w_2 y $r_2$en términos de b, T y las cantidades (1). Es posible expresar w_2 como una función de r_2.	1.1pt

Parte B. Estación espacial en rotación (6.5 points)

Alice es una astronauta viviendo en una estación espacial. La estación espacial es una rueda gigante de radio R rotando alrededor de su eje de tal forma que provee gravedad artificial a los astronautas. Los astronautas viven en el costado interior de la rueda. La estación espacial es tan ligera que ignoraremos su atracción gravitacional.

B.1	¿Con qué frecuencia angular ω_{ss} debe rotar la estación espacial para que los astronautas perciban la misma aceleración gravitacional g_E que en la superficie de la tierra?	0.5pt

Alice y su amigo astronauta Bob tienen un desacuerdo. Bob no cree que en realidad estén viviendo en una estación espacial sino en la Tierra. Alice quiere probarle a Bob, usando la física, que en realidad viven en una estación espacial rotando. Con este objetivo, Alice amarra una masa m a un resorte con constante elástica k y le deja oscilar. La masa oscila solo en la dirección vertical y no se puede mover en la dirección horizontal.

B.2	Asumiendo que la aceleración gravitacional sobre la tierra es constante con valor g_E, ¿cuál seria la frecuencia de oscilación ω_E que uno mediría?	0.2pt

B.3	¿Qué frecuencia de oscilación ω medirá Alice sobre la estación espacial?	0.6pt

Alice esta convencida de que su experimento comprueba que se encuentran en una estación espacial rotando. Bob permanece escéptico. El asegura que al tomar en cuenta el cambio de la gravedad sobre la superficie de la tierra, uno encuentra un efecto similar. ¿Está Bob en lo correcto?

B.4	Derive una expresión para la gravedad $g_E(h)$ para altitudes bajas h sobre la superficie de la tierra y calcule la frecuencia angular $\tilde{\omega}_E$ (una aproximación lineal es suficiente). El radio de la tierra está dada por R_E.	0.8pt

En efecto, Alice encuentra que el resorte oscila con la frecuencia que Bob predijo.

B.5	¿Para qué radio R de la estación espacial coincidirá ω con la frecuencia de oscilación $\tilde{\omega}_E$ sobre la superficie de la tierra?	0.3pt

Exasperada con la terquedad de Bob, a Alice se le ocurre la idea de usar la fuerza de Coriolis para probar que tiene razón. Para esto, sube a una torre de altura H con respecto a la base de la estación espacial y suelta una masa.

La fuerza de coriolis es una fuerza ficticia que surge en marcos de referencia rotando uniformemente. La fuerza $\vec{F}_C$ actuando sobre un objeto de masa m moviéndose a velocidad $\vec{v}$ en un marco de referencia con frequencia angular constante $\vec{\omega}_{ss}$ está dada por

$$\vec{F}_C = 2m\vec{v} \times \vec{\omega}_{ss} \ . \tag{2}$$

En términos de las cantidades escalares que se le permite usar

$$F_C = 2mv\omega_{ss} \sin\phi \ , \tag{3}$$

donde ϕ es el ángulo entre la velocidad y el eje de rotación. La fuerza es perpendicular tanto a la velocidad v como al eje de rotación. El signo de la fuerza se puede determinar por medio de la regla de la mano derecha, pero en lo que sigue le puede escoger libremente.

B.6 (1.1pt)

- En el momento de impactar el suelo, ¿cuál es la velocidad horizontal v_x de la masa debido a la fuerza de Coriolis? Puede asumir que la altura H de la torre es pequeña, de manera que la fuerza gravitacional durante la caída es constante.
- Dé un estimado del desplazamiento horizontal d_x de la masa, con respecto a la base de la torre, cuando ésta golpea el suelo.

Para obtener un buen resultado, Alice decide llevar a acabo el experimento en una torre mucho más alta que la anterior. Para su sorpresa, la masa golpea el suelo justo en la base de la torre, tal que $d = 0$.

B.7 (1.3pt)

- Deduzca una ecuación para determinar la altura H de la torre, de la forma

$$H/R = f(H) \ ,$$

  donde $f(H)$ es una función de H y las demás variables del problema.
- Partiendo de esta ecuación, encuentre una cota inferior para la altura de la torre para la cual esto puede suceder.

Alice quiere intentar convencer a Bob una última vez. Ella quiere usar su oscilador con resorte para mostrar el efecto de la fuerza de Coriolis. Para este efecto, ella cambia el montaje original: ella cuelga el resorte de un anillo que puede deslizar libremente sobre una vara horizontal en la dirección x sin fricción. El resorte como tal oscila en la dirección y . La vara se encuentra paralela al suelo y perpendicular al eje de rotación de la estación espacial. El plano xy es por lo tanto perpendicular al eje de rotación, con la dirección y apuntando hacia el centro de rotación de la estación.

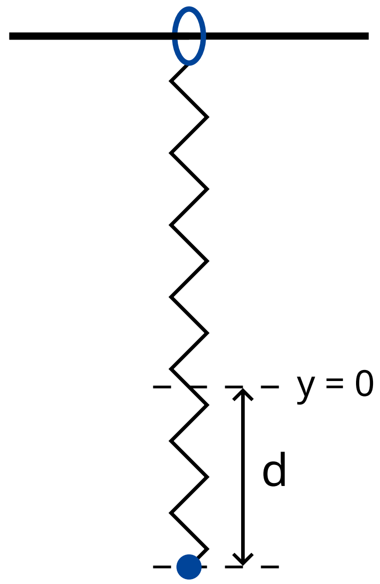

Figura 4: Montaje.

B.8	Alice hala la masa una distancia d hacia abajo con respecto al punto de equilibrio $x = 0$, $y = 0$, y luego la suelta (ver figura 4). • Encuentre una expresión algebraica para $x(t)$ y $y(t)$. Puede asumir que $\omega_{ss}d$ es una cantidad pequeña. • Dibuje la trayectoria $(x(t), y(t))$, marcando todas las características importantes tales como la amplitud.	1.7pt