# دو مسئله در مکانیک (۱۰ نمره)

قبل از پرداختن به این مسئله راهنمایی‌های کلی را، که در پاکت جداگانه‌ای قرار دارد، بخوانید.

## بخش .A دیسک پنهان (۳/۵ نمره)

استوانه‌ای چوبی به شعاع $r_1$ و ضخامت (یا ارتفاع) $h_1$ در نظر بگیرید. در درون پیکره این استوانه چوبی یک دیسک فلزی به شعاع $r_2$ و ضخامت $h_2$ به نحوی جاسازی شده که محور آن، محور $B$، به موازات محور استوانه، محور $S$، است و فاصله آن از قاعده‌های بالایی و پایینی استوانه چوبی یکسان است. فاصله محورهای $S$ و $B$ را $d$ می‌نامیم. چگالی چوب $\rho_1$ و چگالی فلز $\rho_2 > \rho_1$ است. جرم کل دستگاه، شامل استوانه چوبی و دیسک فلزی داخل آن را $M$ بگیرید.

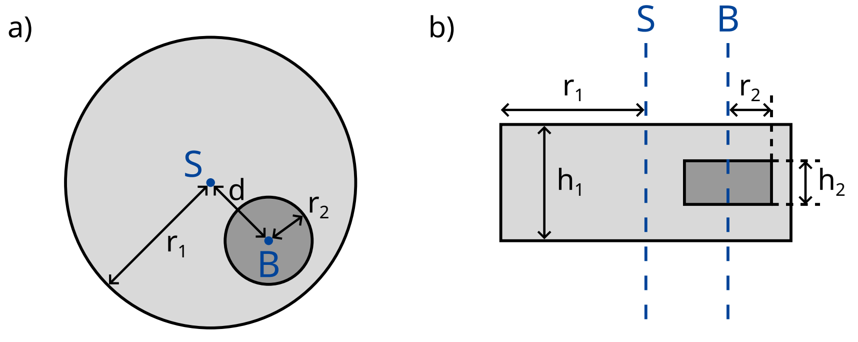
در این بخش از مسئله، استوانه چوبی را از یال روی زمین می‌گذاریم تا بتواند آزادانه به هر طرف بغلتد. شکل ۱ در سمت چپ، استوانه را در حالتی که روی زمین است و از قاعده به آن نگاه می کنیم نشان می‌دهد. در شکل سمت راست یک نمای دستگاه، وقتی از سطح جانبی به آن نگاه شود را می‌بینید.

هدف این بخش از مسئله تعیین اندازه و محل دیسک فلزی است.

در ادامه مسئله، هر جا خواسته می‌شود که جواب را بر حسب کمیت‌های معلوم بنویسید، علاوه بر کمیت‌های خاص ذکر شده در آن بخش، کمیت‌های زیر را نیز می‌توانید معلوم بگیرید.

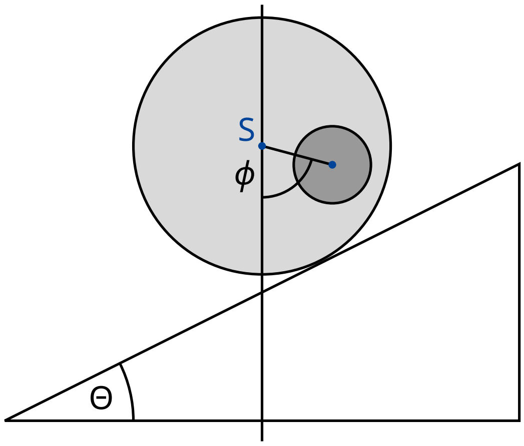
$$r_1,\ h_1,\ \rho_1,\ \rho_2, M\ . \tag{1}$$

حال می خواهیم $h_2, r_2$ و $d$ را با سنجش غیر مستقیم به دست آوریم.




شکل ۱: a ) نمای استوانه از سمت قاعده و b ) از سمت جانبی

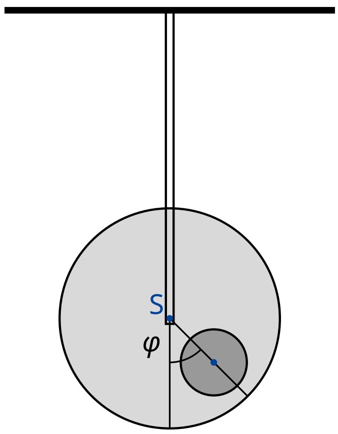
فرض کنید $b$ فاصله مرکز جرم کل دستگاه $C$ از محور تقارن استوانه، محور $S$، باشد. برای تعیین این فاصله آزمایش زیر را انجام می‌دهیم. استوانه را از یال روی یک سطح افقی قابل بلند کردن قرار می‌دهیم و صبر می‌کنیم تا در حالت تعادل پایدار قرار گیرد. حال به آرامی یک طرف سطح را بالا می‌آوریم تا زاویه شیب سطح، مطابق شکل ۲، $\Theta$ شود. فرض کنید اصطکاک ایستایی مانع لغزش استوانه می‌شود و استوانه پس از یک غلتش محدود و آرام به سمت پایین سطح شیبدار، در محل تعادل جدید قرار می‌گیرد. فرض کنید در طی این غلتش، استوانه به اندازه زاویه $\phi$ حول محور تقارن خود چرخیده است که آن را اندازه‌گیری کرده‌ایم.




شکل ۲: استوانه روی سطح شیبدار.

| | | |
|---|---|---|
| **A.1** | عبارتی برای $b$ بر حسب کمیت های داده شده در عبارت (۱)، زاویه $\phi$ و زاویه شیب سطح، $\Theta$، به دست آورید. | 0.8pt |

از این جا به بعد می‌توانید $b$ را هم معلوم بگیرید.




شکل ۳: استوانه در حالت آویخته.

حال می‌خواهیم لختی دورانی استوانه، $I_S$ نسبت به محور تقارن $S$ را به دست آوریم. برای این کار استوانه را در حالتی که یال‌هایش افقی هستند، مطابق شکل ۳ از محور تقارن خود می‌آویزیم. سپس آن را به اندازه زاویه کوچک $\varphi$ از حالت تعادل خارج می‌کنیم و آن را رها می‌سازیم. مشاهده می‌کنیم زاویه انحراف $\varphi$ دارای حرکت تناوبی با دوره $T$ است

| | | |
|---|---|---|
| **A.2** | معادله‌ی حرکت $\varphi$ را بیابید. لختی دورانی استوانه حول محور تقارن $S$ آن، $I_S$، را بر حسب $T$، $b$ و کمیت‌های مذکور در عبارت (1) بیان کنید. فرض کنید در طی حرکت زاویه انحراف $\varphi$ همواره کوچک باقی می‌ماند. | 0.5pt |

در اینجا می‌خواهیم با استفاده از نتیجه اندازه‌گیری‌های بخش‌های A.1 و A.2 مشخصات هندسی و جایگاه دیسک را در داخل استوانه تعیین کنیم.

| | | |
|---|---|---|
| **A.3** | عبارتی برای $d$ بر حسب $b$ و کمیتهای مذکور در عبارت (1) به دست آورید. عبارت شما ممکن است شامل کمیت های $r_2$ و $h_2$ که نهایتاً باید در قسمت A.5 تعیین شوند، نیز باشد. | 0.4pt |

| | | |
|---|---|---|
| **A.4** | عبارتی برای لختی دورانی $I_S$ بر حسب $b$ و کمیتهای مذکور در عبارت (1) به دست آورید. عبارت شما ممکن است شامل کمیت های $r_2$ و $h_2$ که نهایتاً باید در قسمت A.5 تعیین شوند، نیز باشد. | 0.7pt |

| | | |
|---|---|---|
| **A.5** | با استفاده از نتایج فوق، $h_2$ و $r_2$ را بر حسب $b$، $T$ و کمیتهای مذکور در عبارت (1) به دست آورید. می توانید $h_2$ را بر حسب $r_2$ نیز بیان کنید. | 1.1pt |

## بخش B: ایستگاه فضایی چرخان (۶/۵ نمره)

آلیس فضانوردی است که به اتفاق یار همیشگی‌اش باب، در یک ایستگاه فضایی زندگی می‌کند. این ایستگاه فضایی، چرخ غول‌پیکری به شعاع $R$ است که حول محور تقارن خود می‌چرخد و با چرخش خود نوعی احساس گرانش ظاهری برای فضانوردان ایجاد می‌کند. فضانوردان روی لبه داخلی این چرخ عظیم زندگی می‌کنند. جرم ماده سازنده ایستگاه فضایی ناچیز است و از میدان گرانشی واقعی آن چشم می‌پوشیم.

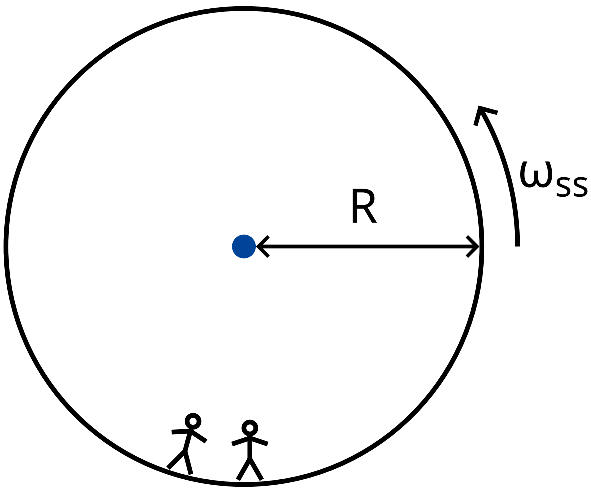
| | | |
|---|---|---|
| **B.1** | سرعت زاویه‌ای ایستگاه فضایی، $\omega_{ss}$ چقدر باشد تا فضانوردان همان شتاب گرانشی $g_E$ در سطح زمین را حس کنند؟ | 0.5pt |

آلیس و دوستش باب بر سر میدان گرانشی که حس می‌کنند با هم اختلاف نظر دارند. باب معتقد نیست که آنها در یک ایستگاه فضایی زندگی می‌کنند و فکر می‌کند که واقعا در سطح زمین هستند. اما آلیس تلاش دارد با انجام آزمایش‌های فیزیکی باب را متقاعد کند که آنها در یک ایستگاه فضایی چرخان زندگی می‌کنند. برای این کار آلیس جرم نقطه‌ای $m$ را به فنری با ثابت $k$ می‌بندد و دستگاه را به نوسان وا می‌دارد. جرم ذکر شده فقط در جهت عمودی نوسان می‌کند و امکان نوسان در جهات افقی را ندارد.

| | | |
|---|---|---|
| **B.2** | با فرض آن که شتاب گرانش زمین ثابت و مقدار آن $g_E$ است، از دید کسی که مطابق فرض باب روی زمین است بسامد زاویه‌ای نوسان دستگاه، $\omega_E$ چیست؟ | 0.2pt |

| | | |
|---|---|---|
| **B.3** | از دید آلیس که معتقد به فرض ایستگاه فضایی است، بسامد زاویه‌ای نوسان دستگاه، $\omega$ چیست؟ | 0.6pt |

آلیس با آزمایش خود مطمئن شده است که در ایستگاه فضایی زندگی می‌کند. اما باب هنوز در پذیرفتن این نظر دچار تردید است. او می‌گوید چه بسا اگر اثر متغیر بودن شتاب گرانش با فاصله از زمین را به حساب آوریم بتوانیم نتیجه آلیس را از این روش نیز به دست آوریم. می‌خواهیم ببینیم چنین چیزی درست است یا نه؟




شکل ۴: ایستگاه فضایی

| | | |
|---|---|---|
| **B.4** | عبارتی برای شتاب گرانشی $g_E(h)$ برای ارتفاع کوچک $h$ بالای سطح زمین به دست آورید و با توجه به آن بسامد زاویه‌ای جدید دستگاه $\tilde{\omega}_E$ را با فرض باب به دست آورید (تقریب خطی کفایت می‌کند). شعاع زمین $R_E$ است. از دوران زمین چشم‌پوشی کنید. | 0.8pt |

از قضا شرایط مسئله طوری است که آلیس مشاهده می‌کند آونگ فنری درست با همان بسامدی که فرضیه باب پیش بینی می‌کند، نوسان می‌کند.

| | | |
|---|---|---|
| **B.5** | شعاع ایستگاه فضایی، $R$، در فرض آلیس چه باشد تا بسامد نوسان دستگاه، $\omega$، با بسامد $\tilde{\omega}_E$ مبتنی بر فرض قرار داشتن در زمین یکی شود؟ پاسخ را بر حسب $R_E$ بنویسید. | 0.3pt |

آلیس در حالی که از سماجت باب برآشفته است، با ایده استفاده از نیروی کوریولیس به میدان می‌آید. به این منظور او بر فراز برجی به ارتفاع $H$ از کف ایستگاه فضایی می‌رود و جسمی را رها می‌کند.

در یک چارچوب مرجع چرخان، فضانوردان یک نیروی مجازی $\vec{F}_C$ موسوم به نیروی کوریولیس را احساس می‌کنند. نیروی $\vec{F}_C$ وارد بر جسمی به جرم $m$ که با سرعت $\vec{v}$ در یک چارچوب چرخان که دارای بسامد زاویه ای $\vec{\omega}_{ss}$ است، حرکت می‌کند از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\vec{F}_C = 2m\vec{v} \times \vec{\omega}_{ss} \,. \tag{2}$$

که بر حسب مقدار کمیت‌ها چنین است:

$$F_C = 2mv\omega_{ss} \sin\phi \,, \tag{3}$$

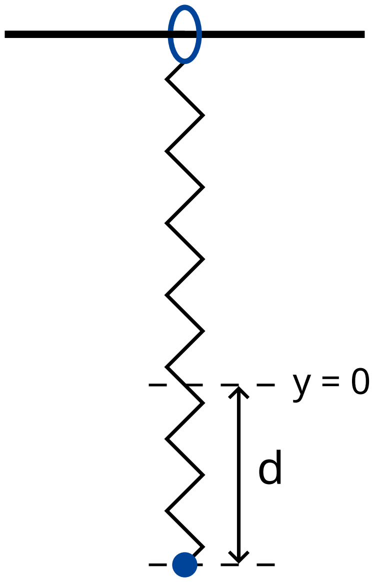
در این رابطه $\phi$ زاویه بین سرعت و محور دوران است. امتداد نیرو بر محور دوران و سرعت ذره، هر دو، عمود است و جهت آن از قاعده دست راست به دست می‌آید. در ادامه، شما در اختیار جهت آزادید.

| | | |
|---|---|---|
| **B.6** | با فرض آن که صفحه شکل ۴، صفحه‌ی $xy$ عمود بر محور دوران است و جهت محور $y$ به سمت مرکز دوران ایستگاه است، سرعت افقی $v_x$ و جابجایی افقی $d_x$ جرم نسبت به پای برج، و در راستای عمود بر برج را در لحظه‌ای که به کف ایستگاه برخورد می‌کند محاسبه کنید. فرض کنید ارتفاع $H$ برج کوچک است، در نتیجه شتاب اندازه‌گیری شده توسط فضانوردان در حین سقوط جرم ثابت است. همچنین فرض کنید $d_x \ll H$. | 1.1pt |

آلیس برای آنکه حرف خود را به کرسی بنشاند و نتیجه چشمگیری مشاهده کند تصمیم می‌گیرد که ارتفاع برج را بسیار بزرگتر از فرض قبل بگیرد. اما در عین ناباوری او شرایط چنان رقم می‌خورد که جسم درست در پای برج به زمین می‌خورد، یعنی $d_x = 0$.

| | | |
|---|---|---|
| **B.7** | حد پایینی برای ارتفاع برج به دست آورید که برای آن $d_x = 0$ قابل وقوع باشد. | 1.3pt |

آلیس آخرین تیر ترکشش را برای قانع کردن باب به کار می‌گیرد. او سعی می‌کند با بررسی اثر نیروی کوریولیس بر نوسانگرش نشان دهد که آنها در یک دستگاه چرخان زندگی می کنند. به این منظور او چینش اولیه مسئله را تغییر می‌دهد و انتهای فنر را به جای یک نقطه ثابت، مطابق شکل (۵) به حلقه‌ای می‌بندد که آزادانه و بدون اصطکاک روی میله‌ای افقی در امتداد محور $x$ حرکت می‌کند. نوسان فنر کماکان در راستای $y$ است و امتداد میله، همان طور که گفته شد، موازی کف ایستگاه و عمود بر محور دوران آن است.




شکل ۵: چینش دستگاه

| | | |
|---|---|---|
| **B.8** | آلیس جرم بسته شده به فنر را به اندازه $d$ پایین تر از نقطه تعادل $x = 0$ و $y = 0$ می‌کشد و سپس آن را رها می‌کند. (شکل ۵ را ببینید)<br>• پاسخ جبری عبارتهای $x(t)$ و $y(t)$ را با فرض آن که کمیت $\omega_{ss}d$ کوچک است، به دست آورید. از نیروی کوریولیس برای حرکت در امتداد محور $y$ صرفنظر کنید.<br>• مسیر $(x(t), y(t))$ را رسم کنید و کلیه جنبه‌های کمی مهم آن، مثل دامنه را در شکل معلوم کنید. | 1.7pt |

آلیس و باب به بحث‌شان ادامه می‌دهند.