Tvö aflfræðiverkefni (10 stig)

Lestu almennu leiðbeiningarnar sem eru í sérstöku umslagi áður en þú byrjar á verkefninu.

Hluti A: Falinn diskur (3,5 stig)

Við skoðum gegnheilan sívalning úr tré með radíus r_1 og hæðina h_1. Einhvers staðar inni í trésívalningnum hefur verið skipt á trénu og málmdiski með radíus r_2 og hæð h_2 . Málmdisknum er komið þannig fyrir að samhverfuás hans B er samsíða samhverfuás trésívalningsins S. Málmdiskurinn er jafnlangt frá topp- og botnflötum trésívalningsins. Við táknum fjarlægðina milli S og B með d. Eðlismassi trésívalningsin er ρ_1 og eðlismassi málmdisksins er $\rho_2 > \rho_1$. Heildarmassi trésívalningsins og málmdisksins er M .

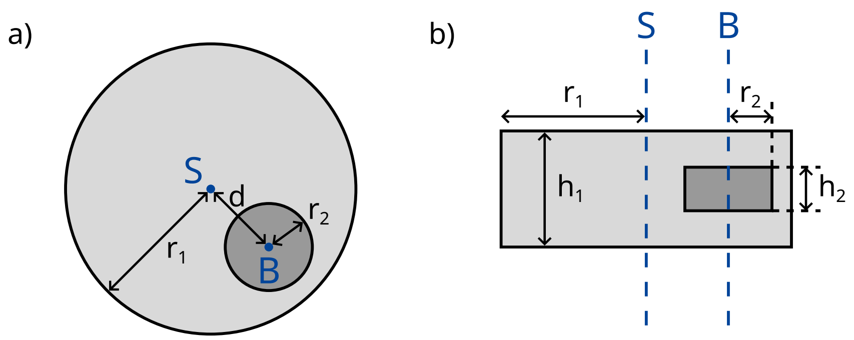
Í þessu verkefni setjum við sívalninginn á jörðina þannig að hann geti rúllað frjálst til vinstri og hægri. Mynd 1 sýnir sívalninginn og málmdiskinn frá hlið og að ofan.

Tilgangur þessa verkefnis er að ákvarða stærð og staðsetningu málmdisksins.

Hér á eftir getur þú alltaf gert ráð fyrir að eftirfarandi sé þekkt þegar þú ert beðin(n) um að tákna niðurstöðurnar með þekktum stærðum:

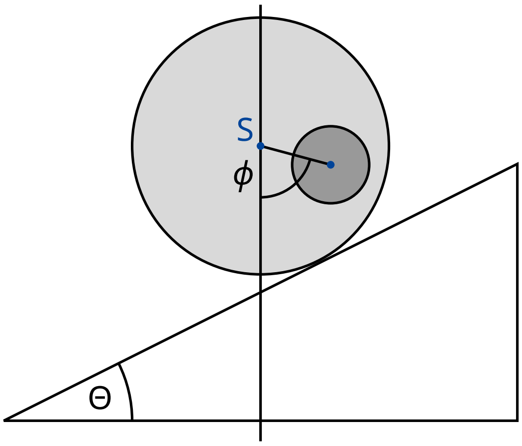
$$r_1,\ h_1,\ \rho_1,\ \rho_2, M\ . \tag{1}$$

Tilgangurinn er að ákvarða r_2, h_2 og d með óbeinum mælingum.



Mynd 1: a) séð frá hlið b) séð að ofan

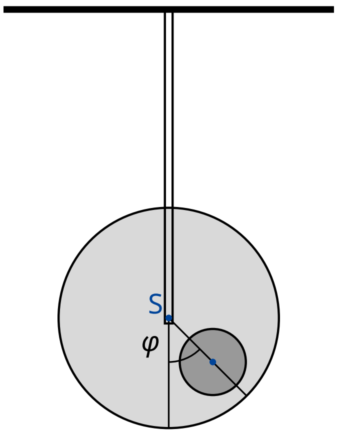
Við látum b tákna fjarlægðina milli massamiðju kerfisins, C, og samhverfuáss trésívalningsins, S. Til að ákvarða þessa fjarlægð setjum við upp eftirfarandi tilraun: Við komum sívalningnum fyrir á láréttum grunnfleti þannig að hann sé í stöðugu jafnvægi. Fletinum er síðan hallað hægt þar til hann myndar hornið Θ miðað við lárétt (sjá mynd 2). Vegna kyrrstöðunúnings getur sívalningurinn rúllað frjálst án þess að renna. Hann mun rúlla smáspöl niður brekkuna en stöðvast í stöðugu jafnvægi þegar hann hefur snúist um hornið ϕ sem við mælum.



Mynd 2: Sívalningur á hallandi fleti.

A.1	Finndu stæðu (formúlu) fyrir b sem fall af stærðunum hér að framan (1), horninu ϕ og halla flatarins Θ .	0.8pt

Héðan í frá getum við gert ráð fyrir að gildi b sé þekkt



Mynd 3: Hangandi kerfi

Næst viljum við mæla hverfitregðu (*moment of inertia*) I_S kerfisins miðað við samhverfuásinn S . Til að gera það hengjum við trésívalninginn upp með því að festa málmstöng við samhverfuás sívalningsins. Síðan snúum við sívalningnum um lítið horn φ úr jafnvægisstöðunni og sleppum honum. Mynd 3 sýnir uppsetninguna. Við fáum út að hornið φ lýsir reglubundinni sveiflu með sveiflutímann T .

A.2	Finndu hreyfijöfnuna fyrir φ. Táknaðu hverfitregðu kerfisins I_S um samhverfuás sinn S sem fall af T, b og þekktu stærðunum (1). Þú mátt gera ráð fyrir að sívalningurinn sé aðeins færður mjög stutt frá jafnvægisstöðunni þannig að hornið φ sé alltaf mjög lítið.	0.5pt

Við viljum nú nota mælingarnar í **A.1** og **A.2** til að ákvarða lögun og staðsetningu málmdisksins inni í sívalningnum.

A.3	Finndu stæðu (formúlu) fyrir fjarlæðinga d sem fall af b og stærðunum (1). Þú mátt líka nota r_2 og h_2 í svarinu, þar sem þessar stærðir verða reiknaðar út í lið **A5**.	0.4pt

A.4	Finndu stæðu fyrir hverfitregðuna I_S sem fall af b og þekktu stærðunum (1). Þú mátt líka nota r_2 og h_2 í svarinu, þar sem þessar stærðir verða reiknaðar út í lið **A5**.	0.7pt

A.5	Notaðu allar niðurstöðurnar hér að framan til að rita formúlu þar sem h_2 og r_2 eru táknaðar við b , T og þekktu stærðirnar (1). Þú mátt tákna h_2 sem fall af r_2.	1.1pt

Hluti B. Geimstöð sem snýst (6,5 stig)

Alice er geimfari sem býr í geimstöð. Geimstöðin er risastórt hjól með radíus R sem snýst um ás sinn og veldur þannig gerviþyngdarkrafti á geimfarana. Geimfararnir búa við brún hjólsins á innri hliðinni. Ekki þarf að taka tillit til þyngdarkraftsins frá geimsstöðinni sjálfri eða sveigju gólfs hennar.

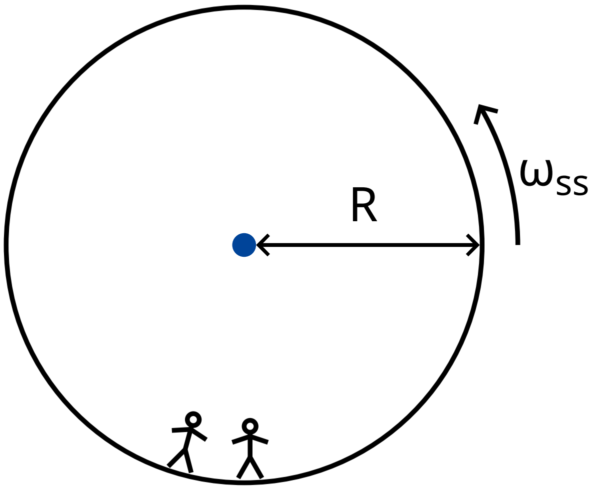
B.1	Með hvaða horntíðni ω_{ss} þarf geimstöðin að snúast svo geimfararnir finni fyrir jafn mikilli þyngdarhröðun g_E og við yfirborð jarðar?	0.5pt

Alice og vinur hennar Bob sem líka er geimfari eru ekki sammála. Bob trúir því ekki að þau búi raunverulega í geimstöð heldur fullyrðir að þau séu á jörðinni. Alice vill nota eðlisfræði til að sanna fyrir Bob að þau búi í geimstöð. Hún festir því massa m við gorm með kraftstuðli k og lætur hann sveiflast. Massinn sveiflast aðeins í lóðrétta stefnu og getur ekki hreyfst í lárétta stefnu.

B.2	Gerum ráð fyrir að á jörðinni sé þyngdarhröðunin fasti g_E . Hvaða horntíðni ω_E myndi maður á jörðinni mæla fyrir sveifluna?	0.2pt

B.3	Hvaða horntíðni ω mælir Alice fyrir sveifluna í geimstöðinni?	0.6pt

Alice er sannfærð um að tilraun hennar sanni að þau séu í geimstöð sem snýst. Bob er enn í vafa. Hann fullyrðir að ef tekið sé tillil til breytingar á þyngdarhröðun vegna fjarlægðar frá yfirborði jarðar hafi það svipuð áhrif. Hér á eftir munum við kanna hvort Bob hafi rétt fyrir sér.



Mynd 4: Geimstöð

B.4	Leiddu út stæðu (formúlu) fyrir þyngdarhröðunina $g_E(h)$ í lítilli hæð h frá yfirborði jarðar og reiknaðu horntíðnina fyrir sveifluna $\tilde{\omega}_E$(nóg að gera línulega nálgun). Radíus jarðar er R_E. Slepptu áhrifum snúnings jarðar.	0.8pt

Alice fær reyndar út að gormapendúllinn sveiflist með tíðninni sem Bob spáði fyrir um.

B.5	Hver þarf radíus geimstöðvarinnar R að vera svo sveiflutíðnin ω sé sú sama og sveiflutíðnin $\tilde{\omega}_E$á yfirborði jarðar? Notaðu stærðina R_E í svarinu .	0.3pt

Þar sem Bob lætur ekki sannfærast dettur Alice næst í hug önnur tilraun til að sanna mál sitt. Hún klifrar upp í turn með hæðina H miðað við gólf geimstöðvarinnar og sleppir massa niður úr turninum. Hægt er að skoða tilraunina í viðmiðunarkerfi geimfaranna sem snýst eða í tregðukerfi,

Í viðmiðuðarkerfi geimfaranna, sem snýst með föstum hornhraða, verða þeir varir við gervikraft $\vec{F}_C$, Coriolis-kraftinn. Krafturin $\vec{F}_C$ sem verkar á hlut með massann m sem hreyfist með hraða $\vec{v}$ í viðmiðunarkerfi sem snýst með fastri horntíðni $\vec{\omega}_{ss}$ er gefin með

$$\vec{F}_C = 2m\vec{v} \times \vec{\omega}_{ss} \; . \tag{2}$$

Með skalarstærðum getur þú notað

$$F_C = 2mv\omega_{ss} \sin\phi \; , \tag{3}$$

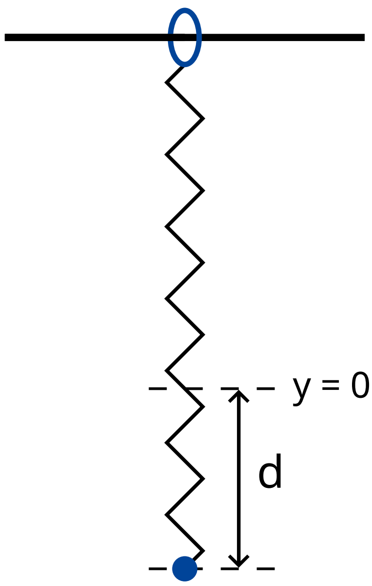
þar sem ϕ er hornið milli hraðans og snúningsássins. Krafturinn er hornréttur bæði á hraðann v og snúningsásinn. Formerki kraftsins er ákvarðað með hægri-handar reglunni en hér á eftir skiptir það ekki máli.

B.6	Reiknaðu út láréttan hraða v_x og lárétta hliðrun $d_x$massans þegar hann lendir á gólfinu, miðað við grunnflöt turnsins, í stefnuna hornrétt á turninn. Þú mátt gera ráð fyrir að hæð turnsins H sé lítil, svo hröðunin sem geimfararnir mæla sé föst á meðan massinn fellur til gólfs. Þú mátt einnig gera ráð fyrir $d_x \ll H$.	1.1pt

Til að fá góða niðurstöðu ákveður Alice að framkvæma tilraunina frá miklu hærri turni en áður. Henni til mikillar undrunar lendir massinn rétt við turninn þannig að $d_x = 0$.

B.7	Finndu lægri mörk fyrir hæð turnsins svo að þetta geti gerst, það er að $d_x = 0$	1.3pt

Alice ætlar að gera lokatilraun til að sannfæra Bob. Hún ætlar að nota gorminn til að sýna áhrif Coriolis kraftsins. Hún breytir uppsetningunni og festir gorminn á hring sem getur runnið frjálst án núnings eftir láréttri stöng samsíða x-ás. Gormurinn sjálfur sveiflast í stefnu y-áss. Stöngin er samsíða gólfi geimstöðvarinnar og hornrétt á snúningsás hennar. Því er xy planið hornrétt á snúningsásinn og y stefnan snýr beint að snúningsmiðju stöðvarinnar.



Mynd 5: Uppsetning

B.8 Alice togar massann vegalengdina d niður fyrir jafnvægispunktinn $x = 0$, $y = 0$ og sleppir honum síðan (sjá mynd 5). — 1.7pt

- Finndu algebrulega stæðu (formúlu) fyrir $x(t)$ og $y(t)$. Þú mátt gera ráð fyrir að stærðin $\omega_{ss} d$ sé lítil, og hunsaðu Coriolis-kraftinn fyrir hreyfingu samsíða y-ás.
- Rissaðu ferilinn $(x(t), y(t))$ og merktu inn alla mikilvæga eiginleika hans, svo sem sveifluvídd.

Alice og Bob halda áfram að rífast.