

2 가지 역학 문제 (10 점)

문제를 풀기 전에 다른 봉투에 담긴 일반 지시사항을 읽으세요.

파트 A. 숨겨진 원판 (3.5 점)

반지름이 r_1 이고, 두께가 h_1 인 나무로 만들어진 속이 찬 원통이 있다. 이 나무 원통 내부 어딘가에 나무를 파내고, 반지름이 r_2 이고, 두께가 h_2 인 금속 원판을 넣었다. 나무 원통의 대칭축 S 와 금속 원판의 대칭축 B 는 평행하며, 금속 원판은 나무 원통의 윗면과 아랫면으로부터 같은 거리에 위치한다. 대칭축 S 와 대칭축 B 사이의 거리를 d 라고 하자. 나무의 밀도는 ρ_1 이고, 금속의 밀도는 $\rho_2 > \rho_1$ 이다. 나무 원통과 금속 원판의 전체 질량은 M 이다.

나무 원통을 바닥에 놓고, 좌우로 자유롭게 구를 수 있게 하자. 그림 1 은 옆에서 본 그림과 위에서 본 그림이다.

이번 문제의 목표는 금속 원판의 위치와 크기를 결정하는 것이다.

지금 이후 단계에서, 알려진 양으로 결과를 표현하라는 문제에서는 다음의 양들이 항상 알려져 있다고 가정해도 좋다:

$$r_1, h_1, \rho_1, \rho_2, M. \quad (1)$$

목표는 간접적인 측정을 통하여 r_2, h_2, d 를 결정하는 것이다.

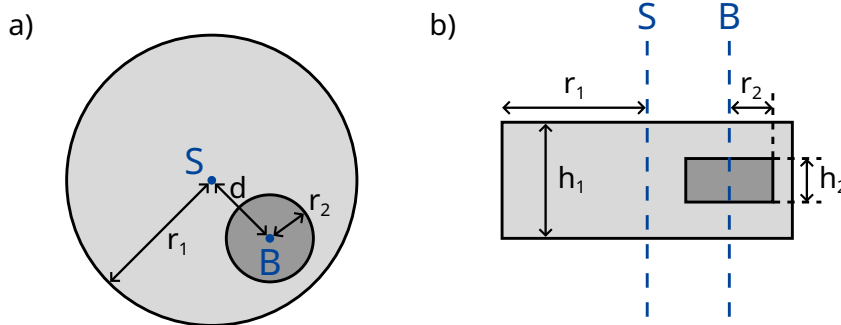


그림 1 : a) 측면에서 본 그림, b) 위에서 본 그림

전체 시스템의 질량 중심 C 에서 나무 원통의 대칭축 S 까지의 거리를 b 라고 하자. 이 거리를 결정하기 위해서, 다음과 같은 실험을 설계하자: 전체 시스템을 수평 바닥면에 놓고, 안정적 평형 상태에 있게 한다. 바닥면을 θ 의 각도로 천천히 비스듬하게 올린다 (그림 2 참고). 정지 마찰력에 의해서, 나무 원통은 미끄러지지 않고 구를 수 있다. 나무 원통은 경사를 조금 굴러 내려오고 난 후 안정적 평형상태가 될 것이고, 나무 원통이 평형에 도달하는 동안 회전한 각도가 ϕ 이다.

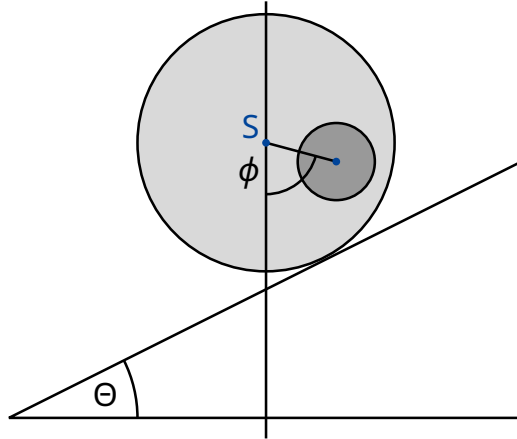


그림 2: 기울어진 바닥면 위의 원통

- A.1** (1)에 주어진 양들과 ϕ , 수평면으로 부터 바닥면이 기울어진 각도 θ 을 이용하여, b 를 표현 하시오. 0.8pt

지금부터, b 값은 알고 있다고 가정한다.

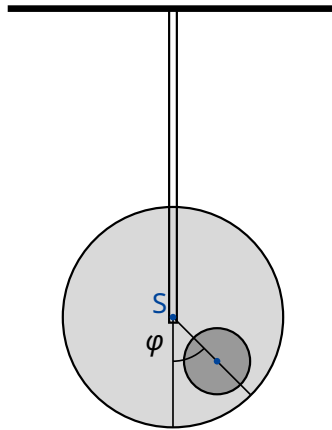


그림 3: 매달린 시스템

그 다음, 대칭축 S 에 대한 시스템의 관성모멘트 I_S 를 측정하자. 이를 위해, 나무 원통의 중심축을 강체 막대에 고정시켜 나무 원통을 매단다. 그리고 안정적 평형상태에서 아주 작은 각도인 φ 만큼 돌린 뒤, 가만히 놓는다. 그림 3 이 이 실험의 셋업이다. φ 는 주기 T 인 주기 운동을 나타내는 변수로 사용될 수 있다.

- A.2** φ 에 대한 운동방정식을 구하시오. 시스템의 대칭축 S 에 대한 관성모멘트 I_S 를 T, b , 그리고 (1)의 알려진 양들을 이용하여 표현하시오. φ 값이 아주 작도록, 평형상태를 아주 조금만 교란시킨다고 가정하자. 0.5pt

문제 **A.1** 과 **A.2** 에서 측정한 결과를 이용하여 나무 원통 내부의 금속 원판의 기하학적 구조와 위치를 결정하자.

A.3 거리 d 를 b 와 (1) 에서 주어진 값들과, 문제 **A.5** 에서 계산할 변수인 r_2 와 h_2 도 이용하여 표현하시오. 0.4pt

A.4 관성모멘트 I_S 를 b 와 (1) 에서 주어진 값들과, 문제 **A.5** 에서 계산할 변수인 r_2 와 h_2 도 이용하여 표현하시오. 0.7pt

A.5 위의 모든 결과들을 활용하여, h_2 와 r_2 를 b, T , 그리고 (1) 에서 주어진 값들을 이용하여 표현하시오. h_2 는 r_2 를 이용하여 표현해도 됩니다. 1.1pt

파트 B. 회전하는 우주 정거장 (6.5 점)

앨리스 (Alice) 는 우주 정거장에 살고 있는 우주 비행사이다. 반지름 R 인 아주 큰 바퀴 모형의 우주 정거장은 우주 정거장의 우주 비행사들에게 중력을 제공하기 위해서 축을 중심으로 회전하고 있다. 우주 비행사들은 바퀴 테두리의 안쪽 내부 (inner side of the rim) 에 살고 있다. 우주 정거장을 구성하는 재료들의 만유인력과 바닥의 곡률은 무시한다.

B.1 얼마의 각 진동수 ω_{ss} 로 우주 정거장이 회전하면, 우주 비행사가 지구 표면에 있을 때와 같은 중력 g_E 를 느낄까? 0.5pt

앨리스와 비행사 동료인 밥 (Bob) 이 논쟁을 했다. 밥은 자신이 우주 정거장에 살고 있지 않으며, 지구에 살고 있다고 믿고 있다. 앨리스는 물리학을 이용하여, 회전하는 우주 정거장에 살고 있다는 것을 증명해주고자 한다. 이를 위해 앨리스는 용수철 상수 k 인 용수철에 질량 m 인 물체를 매달고 진동시켰다. 이 물체는 오직 수직 방향으로만 진동하며 수평 방향으로의 운동하지 않는다.

B.2 지구에서 중력이 중력가속도 g_E 로 일정하다고 가정하면, 지구에 있는 사람이 측정하게 되는 이 용수철의 각 진동수 ω_E 의 수식은 무엇인가? 0.2pt

B.3 앨리스가 우주 정거장에서 측정하게 되는 이 용수철의 각 진동수 ω 의 수식은 무엇인가? 0.6pt

앨리스는 자신의 실험을 통해 그들이 회전하는 우주 정거장 위에 있음을 입증하였다고 확신한다. 하지만, 밥은 아직 의심하고 있다. 밥은 지구 표면 위에서 중력의 변화를 고려하면, 이와 유사한 효과를 발견할 것이라고 주장한다. 다음 과제에서 밥이 옳은지를 조사하자.

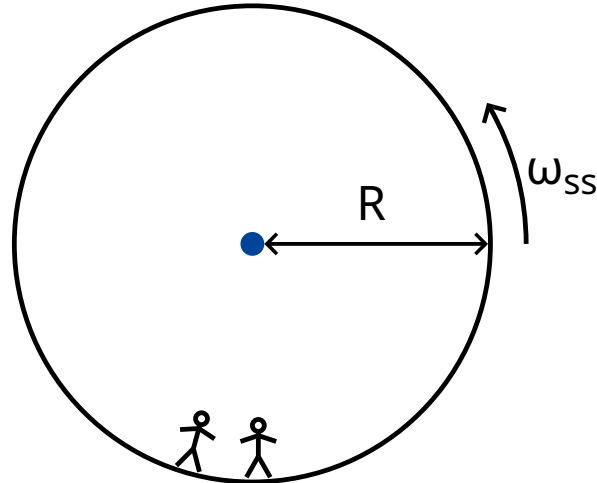


그림 4: 우주 정거장 (Space station)

- B.4** 지구 표면으로부터 아주 작은 높이 h 에서 중력 $g_E(h)$ 을 나타내는 수식을 유도하고, 이 위치에서 진동하는 물체의 진동수 $\tilde{\omega}_E$ 를 계산하시오. (선형 근사 (linear approximation) 를 활용하라.) 지구의 반지름은 R_E 로 표시하시오. 지구의 회전은 무시하시오. 0.8pt

정말로, 앨리스는 이 우주정거장에서 용수철 진자가 밥이 예상한 대로 진동한다는 것을 발견하였다.

- B.5** 우주 정거장에서 용수철의 진동수 ω 가 지구에서 진동수 $\tilde{\omega}_E$ 와 같으려면, 우주 정거장의 반지름 R 이 얼마가 되어야하는가? 답을 R_E 를 이용하여 나타내시오. 0.3pt

밥의 고집에 화가 난 앨리스는 자신의 주장을 증명하기 위해 한 실험을 제안한다. 다시 말해, 우주 정거장의 바닥에서 높이가 H 인 타워에 올라가, 물체를 우주 비행선의 바닥으로 떨어뜨린다. 이 실험은 관성기준틀 (inertial reference frame) 에서 뿐 아니라 회전하는 기준틀 (rotating reference frame) 에서도 이해할 수 있다.

균일하게 회전하는 기준틀에서 우주비행사들은 전향력 (Coriolis force) 이라고 불리는 가상의 힘 (fictitious force) \vec{F}_C 을 느낀다. 일정한 각 진동수 $\tilde{\omega}_{ss}$ 로 회전하는 기준틀에서 \vec{v} 의 속도로 운동하는 질량 m 인 물체에 작용하는 힘 \vec{F}_C 는 다음과 같이 주어진다:

$$\vec{F}_C = 2m\vec{v} \times \tilde{\omega}_{ss} . \quad (2)$$

스칼라 양만을 사용하게 되면, 다음과 같다.

$$F_C = 2mv\omega_{ss} \sin \phi , \quad (3)$$

여기서 ϕ 는 물체의 속도와 기준틀의 회전축 사이의 각도이다. 이 힘은 속도 v 와 회전축 모두에 수직 방향으로 작용한다. 힘의 부호는 오른손 법칙에 의해 결정되지만, 아래 문제에서는 자유롭게 선택해도 된다.

- B.6** 물체가 (우주 정거장의) 바닥을 치는 순간, 물체의 수평 속도 v_x 와 (타워의 바닥에서 타워에 수직인 방향으로) 수평 변위 d_x 을 계산하시오. 타워의 높이 H 가 매우 작으므로 우주 비행사가 측정하는 동안 물체의 가속도가 일정하다고 가정한다. 또한, $d_x \ll H$ 을 가정한다. 1.1pt

좋은 결과를 얻기 위하여, 앨리스는 실험을 전보다 매우 더 높은 타워에서 하기로 결심하였다. 하지만 놀랍게도, 물체가 타워의 바로 아래 부분에 떨어져서 $d_x = 0$ 라는 결과를 얻게 되었다.

B.7 $d_x = 0$ 이 될 수 있는 타워의 높이의 하한 (lower bound) 를 구하시오.

1.3pt

앨리스는 밥을 설득하기 위해 마지막으로 다음 실험을 시도한다. 앨리스는 자신의 용수철 진동자를 이용하여 전향력의 효과를 보여주려고 한다. 이를 위해, 원래의 실험 셋업에 그림과 같이 변화를 주었다. 우주정거장의 바닥과 평행하게 수평으로 놓인 막대의 x 방향으로 마찰없이 움직일 수 있는 고리에 용수철을 붙인다. 용수철은 y 방향으로 진동한다. 막대는 우주정거장의 바닥면과 평행하며, 우주 정거장의 회전축의 방향에 대해서 수직이다. xy 평면은 회전축에 대하여 수직이며, y 방향은 우주 정거장의 회전 중심을 향하는 방향이다.

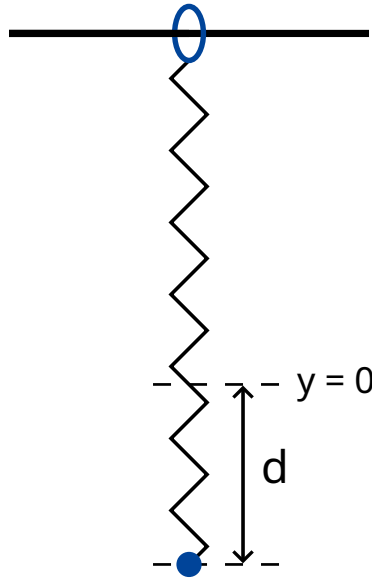


그림 5: 실험의 셋업

B.8 앨리스가 용수철에 매달린 물체를 평형점 $x = 0, y = 0$ 으로부터 아랫방향으로 거리 d 만 1.7pt
큼 당긴 후에 놓았다. (그림 5 참고)

- $x(t)$ 와 $y(t)$ 를 수식으로 표현하시오. $\omega_{ss}d$ 는 작다고 가정하고, y 축 방향 운동에 대한 전향력은 무시할 수 있다.
- $(x(t), y(t))$ 의 궤적을 그리고, 진폭 등과 같은 중요한 특징들을 표시하시오.

앨리스와 밥은 계속해서 논쟁한다.