Zwei Probleme in der Mechanik (10 Punkte)

Bevor Du mit dem Lösen der Aufgabe beginnst, solltest Du unbedingt die allgemeinen Anweisungen in dem separaten Briefumschlag lesen.

Aufgabenteil A: Die versteckte Scheibe (3,5 Punkte)

Betrachte einen massiven Holzzylinder mit Radius r_1 und Dicke h_1. Irgendwo in diesem Zylinder ist eine ebenfalls zylinderförmige Metallscheibe mit Radius r_2 und Dicke h_2 versteckt. Die Metallscheibe ist so platziert, dass ihre Symmetrieachse B parallel zur Symmetrieachse S des Holzzylinders verläuft. Der Abstand zwischen S und B wird mit d bezeichnet. Der Abstand der Metallscheibe von der Ober- und Unterseite des Holzzylinders ist gleich gross (siehe Abbildung 1).

Die Dichte des Holzes ist gegeben durch ρ_1, für die Dichte ρ_2 des Metalls gilt $\rho_2 > \rho_1$. Die gesamte Masse des hölzernen Zylinders mit der Metallscheibe beträgt M.

Für alle weiteren Überlegungen können die folgenden Grössen als bekannt angenommen werden:

$$r_1,\ h_1,\ \rho_1,\ \rho_2, M\ . \tag{1}$$

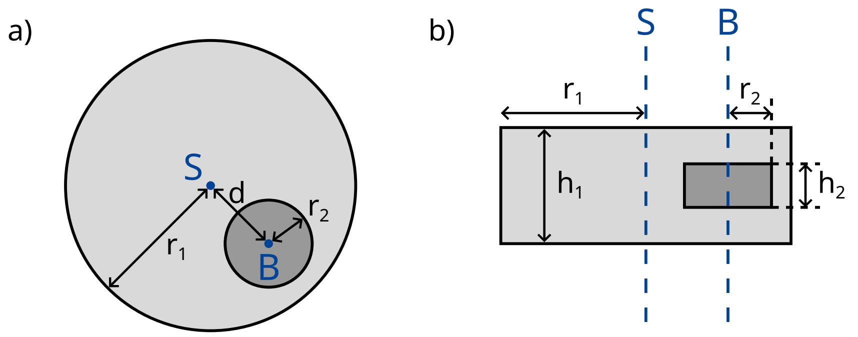

Abbildung 1: Ansicht des Zylinders mit der Metallscheibe: a) von der Seite und b) von oben

Das Ziel dieser Aufgabe A besteht darin, durch indirekte Messungen die Grösse der Metallscheibe (r_2, h_2) und ihre Position (d) zu ermitteln.

In einem ersten Schritt bestimmst Du dazu den Abstand b zwischen dem Schwerpunkt C des Gesamtsystems und der Symmetrieachse S des Zylinders.

Führe folgendes Experiment durch:

Lege den Zylinder auf eine horizontale Unterlage, so dass er frei von links nach rechts rollen kann und sich im stabilen Gleichgewicht befindet.

Jetzt hebst Du die Unterlage auf einer Seite vorsichtig an, die Unterlage ist jetzt um einen Winkel Θ gegenüber der Horizontalen geneigt (siehe Abbildung 2). Aufgrund der Haftreibung kann der Holzzylinder nur rollen, jedoch nicht rutschen.

Der Zylinder wird auf der Schräge ein wenig herunterrollen, bevor er wieder ein stabiles Gleichgewicht erreicht. Die Rotation um den Winkel ϕ gegenüber der Ausgangslage wird gemessen.

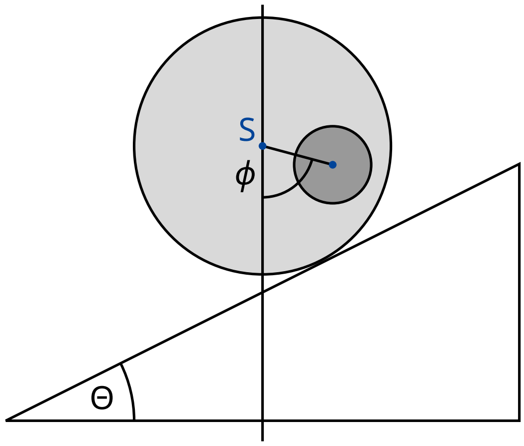

Abbildung 2: Der Zylinder auf der geneigten Unterlage

A.1	Bestimme einen Ausdruck für b in Abhängigkeit der in (1) gegebenen Größen, des Drehwinkels ϕ und des Neigungswinkels Θ der Unterlage .	0.8pt

Ab hier kannst Du auch die Grösse b als bekannt annehmen.

Als nächstes bestimmst Du das Trägheitsmoment I_S des Systems der beiden Zylinder in Bezug auf die Symmetrieachse S. Hierzu hängst Du den Zylinder waagrecht in der Verlängerung seiner Symmetrieachse an zwei Fäden auf und drehst ihn aus seiner Ruheposition um einen kleinen Winkel φ heraus. Abbildung 3 zeigt dir den experimentellen Aufbau (in Richtung der Symmetrieachse des Zylinders betrachtet).

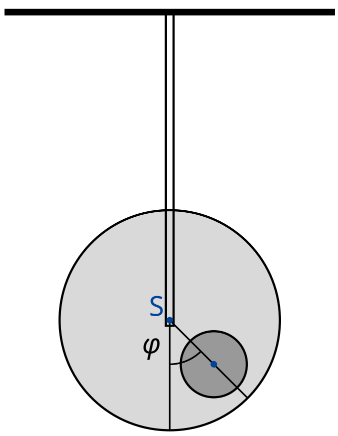

Abbildung 3: Waagrecht aufgehängtes System der beiden Zylinder

Danach lässt Du den Zylinder los. Der Winkels φ ändert sich nun periodisch mit der Periode T.

A.2	Bestimme die Bewegungsgleichung von φ(t). Drücke das Trägheitsmoment I_S des Systems der beiden Zylinder bezüglich der Symmetrieachse S in Abhängigkeit von T, b und bereits bekannten Grössen aus (1) aus. Dabei kannst Du annehmen, dass die Abweichung aus der Gleichgewichtslage sehr klein bleibt, sodass auch φ immer sehr klein bleibt.	0.5pt

Mit den Ergebnissen der Messungen aus **A.1** und **A.2** kannst Du nun die Geometrie und Position der Metallscheibe in dem Holzzylinder bestimmen.

A.3	Finde einen Ausdruck für den Abstand d als Funktion von b und den aus (1) bekannten Grössen. Dabei kannst Du die Grössen r_2 and h_2 als Variablen benutzen, obwohl sie erst in Aufgabe **A.5** konkret berechnet werden.	0.4pt

A.4	Finde einen Ausdruck für das Trägheitsmoment I_S in Abhängigkeit von b und den aus (1) bekannten Grössen. Du kannst dabei wieder die Grössen r_2 and h_2 als Variablen benutzen, obwohl sie erst in Aufgabe **A.5** konkret berechnet werden.	0.7pt

A.5	Benutze nun alle obigen Ergebnisse und bestimme je einen Ausdruck für h_2 und r_2 in Abhängigkeit von b, T und den aus (1) bekannten Grössen. Dabei kannst Du h_2 als Funktion von r_2 ausdrücken.	1.1pt

Aufgabenteil B. Rotierende Raumstation (6.5 points)

Alice ist eine Astronautin und lebt auf einer Raumstation. Die Station hat die Form eines riesigen Rades mit Radius R. Um eine künstliche Gravitationskraft für die Astronauten zu erzeugen, rotiert die Station um die eigene Achse. Die Astronauten leben dabei auf der Innenseite des Randes des Rades. Die gravitative Anziehungskraft der Raumstation sowie die Krümmung des Bodens können vernachlässigt werden.

B.1	Mit welcher Winkelgeschwindigkeit ω_{ss} muss die Raumstation rotieren, damit die Astronauten die gleiche Gravitationsbeschleunigung g_E wie auf der Erdoberfläche erfahren?	0.5pt

Bob - ein Astronautenkollege - glaubt nicht daran, dass er und Alice auf einer Raumstation leben, und er behauptet, dass sie sich nach wie vor auf der Erde befinden. Alice will Bob mit physikalischen Argumenten beweisen, dass sie doch auf einer Raumstation leben. Dazu befestigt sie eine Masse m an einer Feder mit Federkonstante k und lässt diese schwingen. Die Masse kann sich dabei nur in vertikaler, nicht aber in horizontaler Richtung bewegen.

B.2	Welche Kreisfrequenz ω_E würde Alice für ihre Feder auf der Erde messen, unter der Voraussetzung einer konstanten Schwerebeschleunigung g_E?	0.2pt

B.3	Welche Kreisfrequenz ω misst Alice auf der Raumstation?	0.6pt

Alice ist überzeugt, dass ihr Experiment beweisst, dass sie sich auf einer rotierenden Raumstation befinden. Bob bleibt jedoch skeptisch. Er behauptet, dass man einen ähnlichen Effekt auch auf der Erde finden würde, wenn man die Variation der Erdanziehungskraft über der Erdoberfläche berücksicht.

In der folgenden Aufgabe überprüfen wir, ob Bob recht hat.

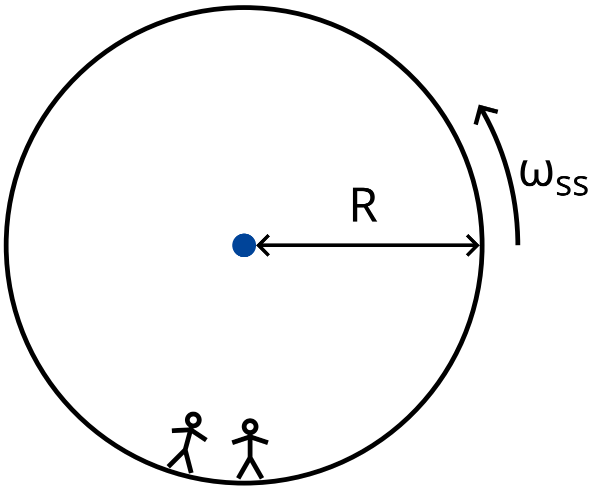

Abbildung 4: Raumstation

B.4	Leite einen Ausdruck für die Erdbeschleunigung $g_E(h)$ für kleine Höhen h über der Erdoberfläche her und berechne die Kreisfrequenz $\tilde{\omega}_E$ für die schwingende Masse an der Feder (eine lineare Annäherung ist ausreichend). Der Radius der Erde wird mit R_E bezeichnet. Vernachlässige die Erdrotation.	0.8pt

Tatsächlich findet Alice, dass ihr Pendel in der Raumstation mit der von Bob vorhergesagten Kreisfrequenz oszilliert.

B.5	Für welchen Radius R der Raumstation stimmt die Kreisfrequenz ω auf der Raumstation mit der Kreisfrequenz $\tilde{\omega}_E$ auf der Erdoberfläche überein? Gib das Ergebnis als Vielfaches des Erdradius R_E an.	0.3pt

Genervt von Bobs Starrköpfigkeit entwirft Alice ein weiteres Experiment, um ihren Standpunkt zu beweisen. Hierzu steigt sie auf einen Turm der Höhe H über dem Boden der Raumstation und lässt von dort eine Masse fallen.

(Dieses Experiment kannst Du entweder in einem rotierenden Bezugssystem oder in einem Inertialsystem beschreiben.)

In einem gleichmässig rotierenden Bezugssystemen nehmen die Astronauten eine fiktive Kraft $\vec{F}_C$ wahr, genannt Corioliskraft. Die Corioliskraft wirkt auf Körper der Masse m, welche sich mit einer Geschwindigkeit $\vec{v}$ in einem mit konstanter Winkelgeschwindig $\vec{\omega}_{ss}$ rotierenden Bezugssystem fortbewegen. Sie kann wie folgt berechnet werden:

$$\vec{F}_C = 2m\vec{v} \times \vec{\omega}_{ss} \; . \tag{2}$$

Für den Betrag dieser Kraft gilt:

$$F_C = 2mv\omega_{ss} \sin\phi \; . \tag{3}$$

Dabei ist ϕ der Winkel zwischen dem Geschwindigkeitsvektor und der Rotationsachse. Die Kraft wirkt in eine Richtung, welche normal zum Geschwindigkeitsvektor und der Rotationsachse steht. Das Vorzeichen der Kraft kann durch die "Rechte-Hand-Regel" bestimmt werden. Du kannst es aber im Folgenden beliebig wählen.

B.6	Berechne die horizontale Geschwindigkeitskomponente v_x und den horizontalen Abstand d_x (vom Fusspunkt des Turmes) der fallenden Masse zum Zeitpunkt des Aufpralles auf dem Boden. Nimm an, dass die Höhe H des Turmes klein genug ist, sodass die von den Astronauten gemessene Beschleunigung während des ganzen Fall-Vorganges als konstant angenommen werden kann. Ebenso kannst Du annehmen, dass $d_x \ll H$.	1.1pt

Um ein gutes Ergebnis zu erhalten, entscheidet sich Alice, das Experiment von einem viel höheren Turm als zuvor durchzuführen. Zu ihrer Verwunderung trifft die Masse jedoch genau am Fusse des Turms auf, sodass $d\ = 0$.

B.7	Gib eine untere Grenze für die Höhe H des Turmes an, für welche $d_x\ = 0$ eintreten kann.	1.3pt

Alice möchte einen letzten Versuch wagen, um Bob zu überzeugen. Sie benutzt ihr Federpendel, um den Effekt der Corioliskraft nachzuweisen. Hierzu wird der ursprüngliche Aufbau folgendermassen abgändert:

In der Raumstation wird ein Stab parallel zum Boden und senkrecht zur Rotationsachse der Raumstation montiert. Die Feder wird über einen Ring an diesem Stab befestigt. Der Ring kann auf dem Stab reibungfrei in x Richtung gleiten. Die Feder schwingt in y-Richtung. Die xy Ebene liegt daher im rechten Winkel zur Rotationsachse der Raumstation, wobei y in die Richtung des Rotationszentrums der Station zeigt.

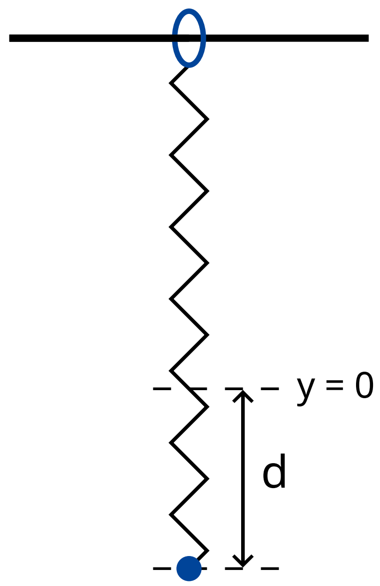

Abbildung 5: Stab mit (ausgelenkter) Feder

B.8	Alice lenkt die Masse um die Strecke d nach unten aus der Ruhelage bei $x = 0$, $y = 0$ heraus ab, und lässt sie dann los (siehe Abbildung 5). • Bestimme einen algebraischen Ausdruck für $x(t)$ und $y(t)$. Hierfür kannst Du annehmen, dass $\omega_{ss}d$ klein ist. Zudem kannst Du die Corioliskraft in Richtung der y-Achse vernachlässigen. • Stelle die Bahnkurve $(x(t), y(t))$ grafisch dar und markiere dabei alle wichtigen Grössen wie z.B. die Amplitude.	1.7pt

Alice und Bob argumentieren weiter ...