යාන්ත්‍ර විද්‍යාවේ ගැටළු දෙකක් (10 points)

Please read the general instructions in the separate envelope before you start this problem.

Part A. සැඟවුණු තැටිය (3.5 points)

අරය r_1 සහ ඝනකම w_1 වූ ලී යෙන් තැනූ සිලින්ඩරයක් සලකන්න. එම සිලින්ඩරය තුල යම් ස්ථානයක ලීය ඉවත් කර එම කොටස, අරය r_2 සහ ඝනකම w_2 වූ යකඩෙන් තැනූ තැටියක් සවිකර ඇත. (රූපය 1 a බලන්න). යකඩෙන් තැනූ තැටියක සවිකර ඇත්තේ එහි සමමිතික අක්ෂය B සිලින්ඩරයේ සමමිතික අක්ෂය S හා සමාන්තර වන පරිදිය. තවද, යකඩ තැටිය සවිකර ඇති ආකාරය සඳහා (රූපය 1 b බලන්න). S සහ B අතර දුර d වේ. ලී වල ඝනත්වය ρ_1, යකඩ වල ඝනත්වය $\rho_2 > \rho_1$ වේ. සිලින්ඩරය සහ තැටියේ ස්කන්ධවල එකතුව M වේ.

සිලින්ඩරය පොලොව මත තැබූවිට එය වමට සහ දකුණට පැද්දේ. See Fig. 1 side view (පැතිපෙනුම) and a view from the top (ඉහලින් බැලුවිට පෙනුම) of the setup.

අපගේ අරමුණ වන්නේ යකඩ තැටියේ ප්‍රමාණය සහ පිහිටුම දන්නා පරාමිති වලින් සෙවීමය.

ඔබගේ පිළිතුර දන්නා පරාමිතිවලින් සඳහන් කරන ලෙස සඳහන් කල විට, දන්නා පරාමිති ලෙස (1) හි දක්වා ඇති පරාමිති පමණක් භාවිත කරන්න.

$$r_1,\ h_1,\ \rho_1,\ \rho_2, M\ . \tag{1}$$

අපගේ අරමුණ වන්නේ r_2, w_2 සහ d, යන පරාමිති සහ විවිධාකාර පරීක්ෂණ මිනුම් මගින් සෙවීමය.

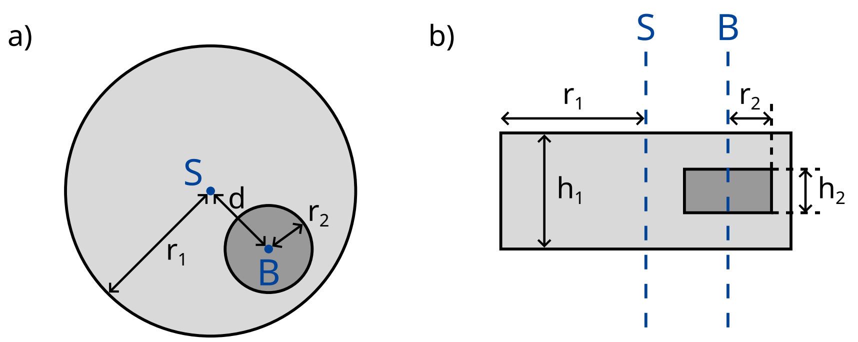

Figure 1: a) side view (පැතිපෙනුම) b) view from top (ඉහලින් බැලුවිට පෙනුම)

b යනු සිලින්ඩරයේ සමමිතික අක්ෂයේ S මුළු පද්ධතියේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය C ට ඇති දුරවේ. (රූපයේ පෙන්වා නොමැත).

මෙම දුර b නිර්ණය කිරීම සඳහා, පහත රූපය 2 හි පෙන්වා තිබෙන පරීක්ෂණය සිදුකරනු ලැබේ.

මුලින්ම සිලින්ඩරය තිරස් තලයක තබා, එය සමතුලිත ස්ථායිතාවේ පවතින අවස්ථාව සකස් කරගනු ලැබේ. දැන් එම තලය ඉතා සෙමින් ආනත කරනු ලැබේ. ආනත තලය Θ කෝණයක් තිරස සමග සාදන අවස්ථාවේදී ඝර්ෂණය නිසා සිලින්ඩරය, තලය මත ලිස්සා නොයා, එය නිදහස් ලෙස අප මනිනු ලබන ϕ කෝණයක් පෙරෙලෙමින් නැවත ආනත තලය මත එය නිසලව සමතුලිත ස්ථායිතාවට පත්වේ. (see Fig. 2).

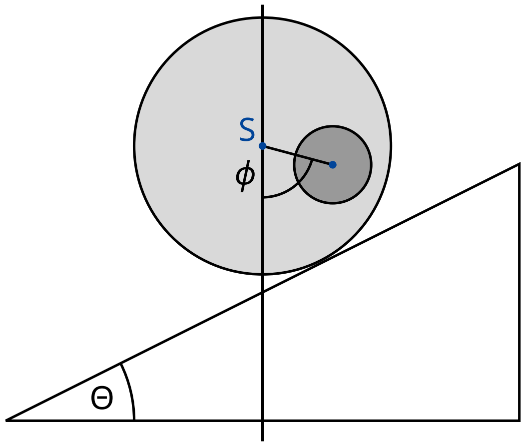

Figure 2: Cylinder on an inclined base.

A.1	ඉහත (1) හි සඳහන්, දන්නා පරාමිති ඇසුරෙන්, කෝණ ϕ සහ Θ හි ශ්‍රිතයක් ලෙස b සඳහා ප්‍රකාශනයක් ලියන්න.	0.8pt

b පරාමිතිය දන්නා පරාමිතියක් ලෙස මෙතැන් සිට ඔබට උපකල්පනය කල හැක.

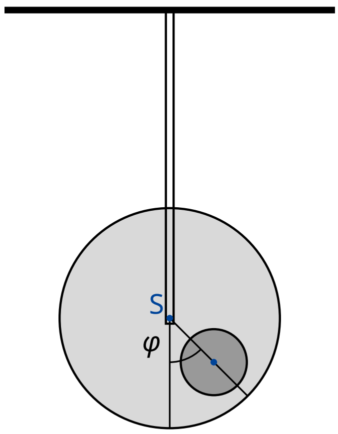

Figure 3: Suspended cylinder.

ඊලඟට සිලින්ඩරයේ සම්මමිතික අක්ෂයට S සාපේක්ෂව සිලින්ඩරයේ අවස්ථිති ඝූර්ණය (the moment of inertia) I_S නිර්ණය කිරීමට අවශ්‍ය ය. මේ සඳහා සිලින්ඩරයේ සම්මමිතික අක්ෂයෙන් එය එල්ලා, එහි සම්මමිතික අක්ෂය වටා, එහි සමතුලිත අවස්ථාවේ සිට කුඩා φ, කෝණයකින් භ්‍රමණය කර, එය තිරස් තලයක දෝලනය වනු පිණිස අතහරිනු ලැබේ. (රූපය 3 හි පද්ධතියේ ඉහලින් බැලුවිට පෙනුම දක්වයි). පද්ධතිය දෝලන කාලය, T වන ආවර්ති චලනයක දේ.

A.2	මෙම චලිතය හඳුන්වනු ලබන භෞතික විද්‍යාත්මක නාමය කුමක්ද? සිලින්ඩරයේ සමමිතික අක්ෂය S වටා අවස්ථිති ඝූර්ණය (Moment of inertia) I_S ,දෝලන කාලය T, b, සහ ඉහත (1) හි සඳහන් දන්නා පරාමිති ඇසුරෙන් ව්‍යුත්පන්න කරන්න. ව්‍යුත්පන්නයේදී, φ, ඉතා කුඩා බව උපකල්පනය කරන්න.	0.5pt

From the measurements in questions A.1 and A.2, we now want to determine the geometry and the position of the metal disk inside the wooden cylinder.

A.3	Find an expression for the distance d as a function of b and the quantities (1). You may also include r_2 and h_2 as variables in your expression, as they will be calculated in subtask A.5.	0.4pt

A.4	Find an expression for the moment of inertia I_S in terms of b and the known quantities (1). You may also include r_2 and h_2 as variables in your expression, as they will be calculated in subtask A.5.	0.7pt

A.5	Using all the above results, write down an expression for h_2 and r_2 in terms of b, T and the known quantities (1). You may express h_2 as a function of r_2.	1.1pt

Part B. Rotating Space Station (6.5 points)

Alice නම්වූ ගගනගාමියා, අජටාකාශ ස්ථානයක (space station),. ජීවත් වේ. එම ස්ථානය විශාල අරයක් සහිත වූ තම අක්ෂය වටා කරකැවෙන රෝදයක හැඩය ගනී. එමගින් එම රෝදයේ ඇතුලත ගැටියේ (rim) ජීවත් වන ගගනගාමීන් හට පෘථිවියට ආසන්න වශයෙන් සමාන ගුරුත්වාකර්ශන බලයක් කෘත්‍රිමව ඇතිකළ හැකිය. අජටාකාශ ස්ථානය ඉතා සැහැල්ලු බව සලකන්න. එමනිසා පෘථිවිය මගින් ඇතිකරනු ලබන ගුරුත්වාකර්ශන බලය නොසලකන්න.

B.1	ගගනගාමීන් අජටාකාශ ස්ථානය තුල පෘථිවියට සමාන ගුරුත්වජ ත්වරණයක් g_E අත්දකී නම්, අජටාකාශ ස්ථානය භ්‍රමණය වන කෝණික සංඛ්‍යාතය ω_{ss} සඳහා ප්‍රකාශනයක් ව්‍යුත්පන්න කරන්න.	0.5pt

Alice and her astronaut friend Bob have an argument. Bob does not believe that they are in fact living in a space station and claims that they are on Earth. Alice wants to prove to Bob that they are living on a rotating space station by using physics.

Alice, අජටාකාශ ස්ථානයේ (space station), සවිකර ඇති දුන්නක (දුනු නියතය k) අනෙක් කෙළවරකට ස්කන්ධයක් m සවිකර සිරස් ලෙස දෝලනය කරනු ලැබේ. එය තිරස් ලෙස දෝලනය විය නොහැක.

B.2	පෘථිවියේ ගුරුත්වාකර්ශන බලය නියතවේ යැයිද ගුරුත්වජ ත්වරණය g_E, යයිද උපකල්පනය කර, දුන්නේ දෝලනය සඳහා, කෝණික සංඛ්‍යාතය ω_E සඳහා ප්‍රකාශනයක් ලියන්න.	0.2pt

B.3	ඉහත උපකල්පනවලට යටත්ව, අජටාකාශ ස්ථානය (space station) තුල සිටින Alice මනින කෝණික දෝලනය සංඛ්‍යාතය, ω සඳහා ප්‍රකාශනයක් ව්‍යුත්පන්න කරන්න.	0.6pt

Alice is convinced that her experiment proves that they are on a rotating space station. Bob remains skeptical. He claims that when taking into account the change in gravity above the surface of the Earth, one finds a similar effect. Is he right?

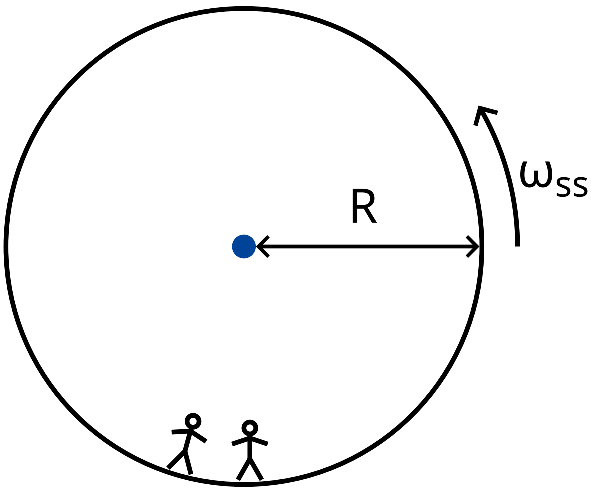

Figure 4: Space station

B.4	පෘථිවියේ ගුරුත්වජ ත්වරණය, $g_E(h)$, පෘථිවියේ අරය R_E හා සංසන්දනය කරන විට උස h ඉතා කුඩා බව සලකමින්, ප්‍රසාරණ ක්‍රමයක් ඇසුරෙන්, (රේඛීය ආසන්න කිරීම සැහේ), අජටකාශ ස්ථානයේ කෝණික සංඛ්‍යාතය $\tilde{\omega}_E$ සඳහා ප්‍රකාශනයක් ව්‍යුත්පන්න කරන්න.	0.8pt

Indeed, Alice finds that the spring pendulum oscillates with the frequency that Bob predicted.

B.5	For what radius R of the space station does the oscillation frequency ω match the oscillation frequency $\tilde{\omega}_E$ on the Earth? Express your answer in terms of R_E.	0.3pt

Exasperated with Bob's stubbornness, Alice comes up with an experiment to prove her point. To this end she climbs on a tower of height H over the floor of the space station and drops a mass. This experiment can be understood in the rotating reference frame as well as in an inertial reference frame.

In a uniformly rotating reference frame, the astronauts perceive a fictitious force $\vec{F}_C$ called the Coriolis force. The force $\vec{F}_C$ acting on an object of mass m moving at velocity $\vec{v}$ in a rotating frame with constant angular frequency $\vec{\omega}_{ss}$ is given by

$$\vec{F}_C = 2m\vec{v} \times \vec{\omega}_{ss} \, . \tag{2}$$

In terms of the scalar quantities you may use

$$F_C = 2mv\omega_{ss} \sin\phi \, , \tag{3}$$

where ϕ is the angle between the velocity and the axis of rotation. The force is perpendicular to both the velocity v and the axis of rotation. The sign of the force can be determined from the right-hand rule, but in what follows you may choose it freely.

B.6	Calculate the horizontal velocity v_x and the horizontal displacement d_x (relative to the base of the tower, in the direction perpendicular to the tower) of the mass at the moment it hits the floor. You may assume that the height H of the tower is small, so that the acceleration as measured by the astronauts is constant during the fall. Also, you may assume that $d_x \ll H$.	1.1pt

To get a good result, Alice decides to conduct this experiment from a much taller tower than before. To her surprise, the mass hits the floor at the base of the tower, so that $d_x = 0$.

B.7	Find a lower bound for the height of the tower for which it can happen that $d_x = 0$.	1.3pt

Alice is willing to make one last attempt at convincing Bob. She wants to use her spring oscillator to show the effect of the Coriolis force. To this end she changes the original setup: She attaches her spring to a ring which can slide freely on a horizontal rod in the x direction without any friction. The spring itself oscillates in the y direction. The rod is parallel to the floor and perpendicular to the axis of rotation of the space station. The xy plane is thus perpendicular to the axis of rotation, with the y direction pointing straight towards the center of rotation of the station.

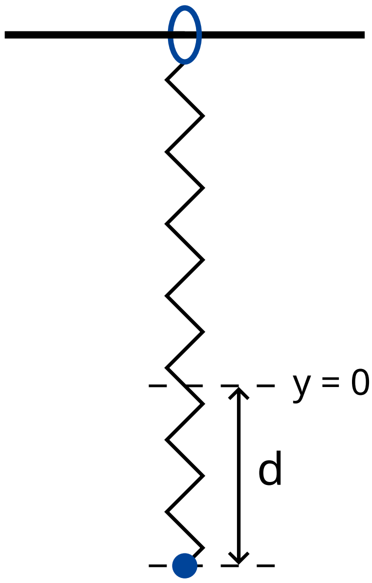

Figure 5: Setup.

B.8 Alice pulls the mass a distance d downwards from the equilibrium point $x = 0$, $y = 0$, and then lets it go (see figure 5). 1.7pt

- Give an algebraic expression of $x(t)$ and $y(t)$. You may assume that $\omega_{ss}d$ is small, and neglect the Coriolis force for motion along the y-axis.
- Sketch the trajectory $(x(t), y(t))$, marking all important features such as amplitude.

Alice and Bob continue to argue.