Divi mehānikas uzdevumi (10 punkti)

Pirms sāc risināt šo uzdevumu, izlasi vispārīgos norādījumus, kas atrodami atsevišķajā aploksnē.

A daļa. Slēptais disks (3.5 punkti)

Ir dots no viena koka gabala veidots cilindrs ar rādiusu r_1 un biezumu h_1. Kādā vietā koka cilindra iekšpusē koks ir aizvietots ar metāla disku ar rādiusu r_2 un biezumu h_2. Metāla disks ir ievietots tā, ka tā simetrijas ass B ir paralēla koka cilindra simetrijas asij S, un attālums līdz koka cilindra priekšējai un aizmugurējai skaldnei ir vienāds. Attālumu starp S un B mēs apzīmējam ar d. Koka blīvums ir ρ_1, metāla blīvums ir $\rho_2 > \rho_1$. Kopējā koka cilindra un tā iekšā esošā metāla diska masa ir M.

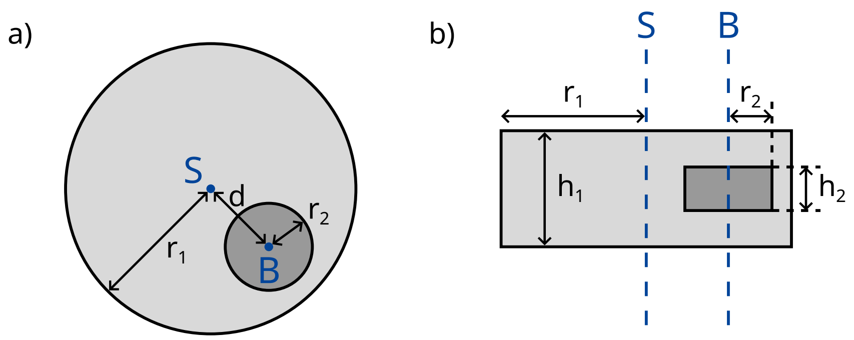
Šajā uzdevumā mēs novietojam koka cilindru uz zemes tā, ka tas spēj brīvi ripot pa labi un pa kreisi. 1. attēlā ir redzams iekārtas sānskats un skats no augšas.

Šī uzdevuma mērķis ir noteikt metāla cilindra izmēru un atrašanās vietu.

Tālākos jautājumos, kur tiek prasīts izteikt rezultātu, izmantojot zināmos lielumus, par zināmajiem tiek uzskatīti:

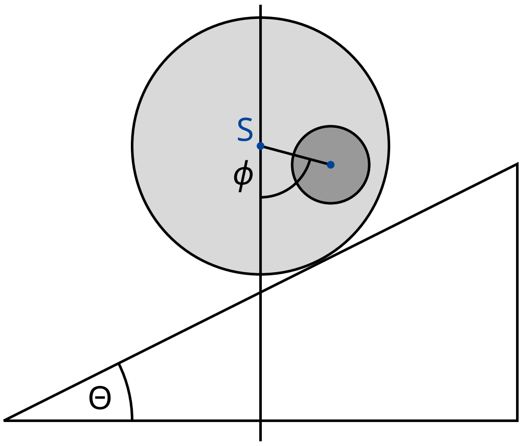
$$r_1,\ h_1,\ \rho_1,\ \rho_2, M\ . \tag{1}$$

Mērķis ir noteikt r_2, h_2 un d, izmantojot netiešus mērījumus.



1. attēls: a) sānskats un b) skats no augšas.

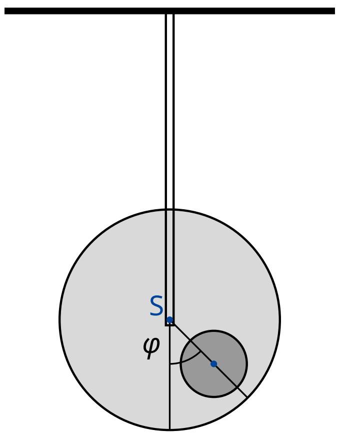
Apzīmēsim ar b attālumu starp visas sistēmas masas centru C un koka cilindra simetrijas asi S. Lai noteiktu šo attālumu, mēs piedāvājam sekojošu eksperimentu: novietojam koka cilindru uz horizontālas virsmas tā, ka tas atrodas stabilā līdzsvara stāvoklī. Tālāk lēnam sagāžam virsmu, lai izveidotos slīpā plakne ar leņķi Θ (skaties 2. attēlu). Pateicoties statiskajai berzei, koka cilindrs spēj brīvi ripot bez izslīdēšanas. Cilindrs paripos nedaudz uz leju, bet pēc tam apstāsies stabilā līdzsvara stāvoklī. Mēs mērīsim leņķi ϕ, par kuru cilindrs būs pagriezies.



2. attēls: Cilindrs uz slīpās virsmas.

A.1	Iegūsti izteiksmi lielumam b kā funkciju no lielumiem (1), leņķa ϕ un slīpās plaknes leņķa Θ.	0.8pt

Atlikušajā uzdevuma daļā uzskatīsim, ka b ir zināms.



3. attēls: Iekārtā sistēma.

Tālāk mēs vēlamies izmērīt sistēmas inerces momentu I_S attiecībā pret simetrijas asi S. Šim nolūkam mēs esam uzsprauduši cilindru uz tieva stieņa, kas iet pa simetrijas asi, bet stieņa galus esam nofiksējuši nekustīgus. Pēc tam mēs pagriežam to no tā līdzsvara stāvokļa par nelielu leņķi φ un palaižam vaļā, skaties 3. attēlu. Rezultātā φ apraksta periodisku kustību ar periodu T.

A.2	Uzraksti φ kustības vienādojumu. Izsaki sistēmas inerces momentu I_S ap tās simetrijas asi S atkarībā no lielumiem T, b un zināmajiem lielumiem (1). Vari pieņemt, ka mēs esam izkustinājuši cilindru no līdzsvara stāvokļa pavisam nedaudz,un φ vienmēr ir ļoti mazs.	0.5pt

Zinot mērījumu rezultātus jautājumos **A.1** un **A.2**, mēs vēlamies noteikt metāla cilindra izmērus un tā atrašanās vietu koka cilindrā.

A.3	Izsaki attālumu d kā funkciju no lieluma b un zināmajiem lielumiem (1). Tu drīksti izmantot arī r_2 un h_2 kā mainīgos savās izteiksmēs, jo tie tiks izrēķināti jautājumā **A.5**.	0.4pt

A.4	Izsaki inerces momentu I_S kā funkciju no lieluma b un zināmajiem lielumiem (1). Tu drīksti izmantot arī r_2 un h_2 kā mainīgos savās izteiksmēs, jo tie tiks izrēķināti jautājumā **A.5**.	0.7pt

A.5	Izmantojot iepriekš iegūtos rezultātus, izrisini h_2 un r_2 izteiksmes atkarībā no b, T un zināmajiem lielumiem (1). Tu drīksti izteikt h_2 kā funkciju no r_2.	1.1pt

B daļa. Rotējošā kosmosa stacija (6.5 punkti)

Alise ir astronaute, kas dzīvo kosmosa stacijā. Kosmosa stacija ir milzīgs ritenis ar rādiusu R, kas griežas ap savu simetrijas asi, tādā veidā nodrošinot astronautiem mākslīgo gravitāciju. Astronauti dzīvo uz riteņa ārējās malas iekšpuses. Kosmosa stacijas īstās gravitācijas izraisīto pievilkšanās spēku, kā arī grīdas liekumu var neņemt vērā.

B.1	Ar cik lielu leņķisko ātrumu ω_{ks} ir jāgriežas kosmosa stacijai, lai astronauti sajustu tādu pašu brīvās krišanas paātrinājumu g_Z kā uz Zemes virsmas?	0.5pt

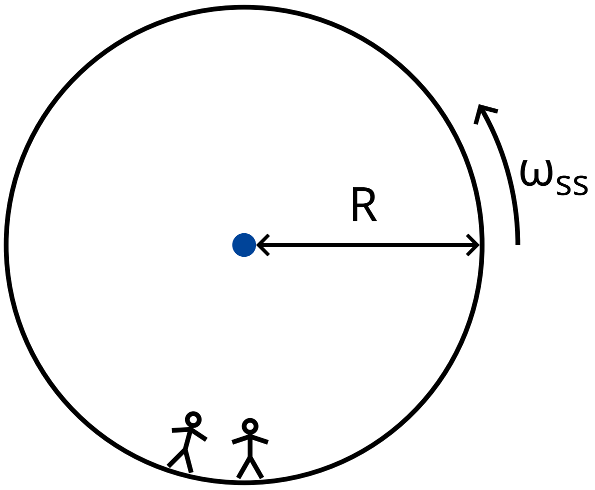
Alise un viņas draugs astronauts Bobs strīdas. Bobs netic, ka viņi dzīvo kosmosa stacijā un apgalvo, ka viņi atrodas uz Zemes. Alise ar fizikas palīdzību grib pierādīt Bobam, ka viņi dzīvo rotējošā kosmosa stacijā. Lai to izdarītu, viņa pievieno masu m pie atsperes ar stinguma koeficientu k un ļauj tai svārstīties. Masa svārstās tikai vertikālā virzienā un tā nespēj pārvietoties horizontālā virzienā.

B.2	Pieņemot, ka Zemes gravitācijas lauks ir nemainīgs un brīvās krišanas paātrinājums ir g_Z , cik liela būs svārstību leņķiskā frekvence ω_Z, ja to mērītu uz Zemes?	0.2pt

B.3	Cik lielu svārstību frekvenci ω Alise izmēra kosmosa stacijā?	0.6pt

Alise ir pārliecināta, ka viņas eksperiments pierāda, ka viņi atrodas rotējošā kosmosa stacijā. Bobs joprojām ir skeptisks. Viņš apgalvo, ka, ņemot vērā brīvās krišanas paātrinājuma izmaiņu Zemes virsmas tuvumā, būs novērojams līdzīgs efekts.

Tālāk mēs pārbaudīsim vai Bobam ir taisnība.



4. attēls: Kosmosa stacija. [ω_{ss} ir tas pats, kas ω_{ks}]

B.4	Izrisini brīvās krišanas paātrinājuma $g_Z(h)$ izteiksmi maziem augstumiem h virs Zemes virsmas un izrēķini svārstību leņķisko frekvenci $\tilde{\omega}_Z$ (lineārais tuvinājums ir pietiekams). Zemes rādiuss ir R_Z. Neņem vērā Zemes rotāciju.	0.8pt

Tiešām, Alise iegūst, ka šai kosmosa stacijai atsperes svārsts svārstās ar frekvenci, ko Bobs ir paredzējis!

B.5	Pie kāda kosmosa stacijas rādiusa R vērtības svārstību frekvence ω būtu vienāda ar svārstību frekvenci $\tilde{\omega}_Z$ uz Zemes? Izsaki atbildi ar lielumu R_Z.	0.3pt

Nokaitināta par Boba stūrgalvību, Alise piedāvā jaunu eksperimentu, lai pierādītu savu taisnību. Lai to izdarītu, viņa uzkāpj tornī ar augstumu H virs kosmosa stacijas grīdas un nomet masu. Šo eksperimentu var analizēt gan rotējošā atskaites sistēmā, gan inerciālā atskaites sistēmā.

Vienmērīgi rotējošā atskaites sistēmā astronauti jūt fiktīvu spēku $\vec{F}_K$, ko sauc par Koriolisa spēku. Spēks $\vec{F}_K$, darbojoties uz ķermeni ar masu m, kas pārvietojas ar ātrumu $\vec{v}$ rotējošā atskaites sistēmā, kas rotē ar konstantu leņķisko ātrumu $\vec{\omega}_{ks}$, ir vienāds ar

$$\vec{F}_K = 2m\vec{v} \times \vec{\omega}_{ks} \,. \tag{2}$$

Skalāriem lielumiem var lietot formulu:

$$F_K = 2mv\omega_{ks} \sin\phi \,, \tag{3}$$

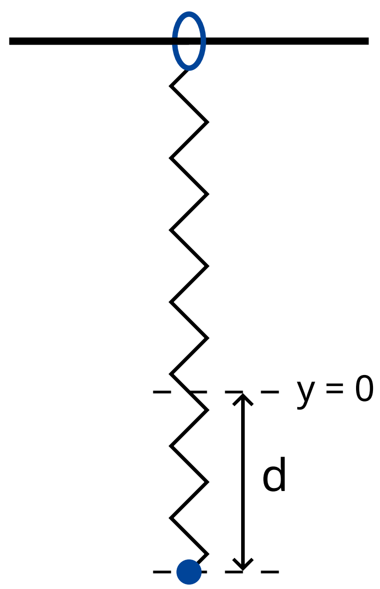
kur ϕ ir leņķis starp ķermeņa ātrumu un sistēmas rotācijas asi. Šis spēks ir perpendikulārs gan ātrumam v, gan rotācijas asij. Spēka zīmi nosaka pēc labās rokas likuma, bet uzdevuma turpinājumā tu drīksti šo zīmi brīvi izvēlēties.

B.6	Aprēķini nomestās masas horizontālo ātrumu v_x un horizontālo pārvietojumu d_x (attiecībā pret torņa pamatu, virzienā, kas ir perpendikulārs tornim) brīdī, kad tā sasniedz grīdu. Tu vari pieņemt, ka torņa augstums H ir tik mazs, ka astronautu nomērītais paātrinājums nemainās kritiena laikā. Papildus drīksti pieņemt, ka $d_x \ll H$.	1.1pt

Lai iegūtu vēl labāku rezultātu, Alise izvēlas veikt šo eksperimentu no daudz augstāka torņa. Viņai par pārsteigumu, masa nokrīt uz grīdas pie torņa pamatnes, kas nozīmē, ka $d_x = 0$.

B.7	Aprēķini mazāko torņa augstumu, pie kura ir iespējams, ka $d_x = 0$.	1.3pt

Alise vēlas pēdējo reizi pamēģināt pārliecināt Bobu. Viņa vēlas izmantot savu atsperes svārstu, lai parādītu Koriolisa spēka ietekmi. Lai to izdarītu, viņa izmaina savu sākotnējo iekārtu, piestiprinot atsperi gredzenam, kurš var brīvi slīdēt bez berzes pa horizontālu stieni x virzienā. Atspere svārstās y virzienā. Stienis ir paralēls grīdai un perpendikulārs kosmosa stacijas rotācijas asij. Rezultātā xy plakne ir perpendikulāra rotācijas asij, bet y ass ir vērsta radiāli.



5. attēls: Iekārtas shematisks attēls.

B.8	Alise pavelk masu uz leju par attālumu d no līdzsvara punkta ar koordinātēm $x = 0$, $y = 0$, un tad palaiž to vaļā (skaties 5. attēlu). • Izrisini $x(t)$ un $y(t)$ algebriskās izteiksmes. Tu vari pieņemt, ka $\omega_{ks} d$ ir mazs, un neņemt vērā Koriolisa spēku kustībai gar y asi. • Uzskicē trajektoriju $(x(t), y(t))$ un atzīmē visas raksturīgās pazīmes, tādas kā amplitūda.	1.7pt

Alise un Bobs joprojām strīdas.