

## 兩題力學問題 (10 分)

開始作答本題前，細讀另一個信封內的一般指引。

### A 部分－隱藏的圓盤 (6 分)

我們考慮一個實心木圓柱體，半徑  $r_1$ 、厚  $h_1$ 。藏在圓柱體內某處，有個金屬圓盤，半徑  $r_2$ 、厚  $h_2$ 。如此放置金屬圓盤，使其的對稱軸  $B$  平行於木圓柱體對稱軸  $S$ ，它到木圓柱體頂部及底部的距離相同。我們記  $S$  至  $B$  的距離為  $d$ 。木的密度是  $\rho_1$ ，金屬的密度是  $\rho_2 > \rho_1$ 。木圓柱體跟金屬圓盤的總質量是  $M$ 。

在本題目，我們將木圓柱體放在地上，這樣它能夠左右自由滾動。看圖 1，看實驗裝置的側視圖及頂視圖。

本題的目標是定出金屬圓盤的大小及位置。

接下來，當被要求用已知的物理量寫出結果，你都可以假定下面的量是已知的：

$$r_1, h_1, \rho_1, \rho_2, M. \quad (1)$$

目標是透過間接測量找出  $r_2, h_2$  和  $d$ 。

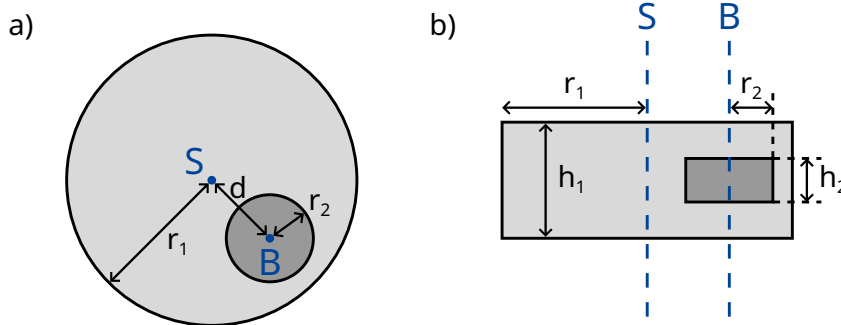


圖 1：a) 側視圖 b) 頂視圖

我們記  $b$  為整個系統的質心  $C$  至木圓柱體對稱  $S$  的距離。為了找出這個距離，我們設計下面的實驗：我們將木圓柱體放在一個水平的基座，使它處於穩定平衡的狀態。現在我們慢慢傾斜基座，使傾角是  $\theta$  (看圖 2)。由於靜摩擦力，圓柱體能夠無滑動地自由滾動。木圓柱體會滾下滑面一點點，但滾過角度  $\phi$  後，它靜止在穩定平衡態。我們測量角度  $\phi$ 。

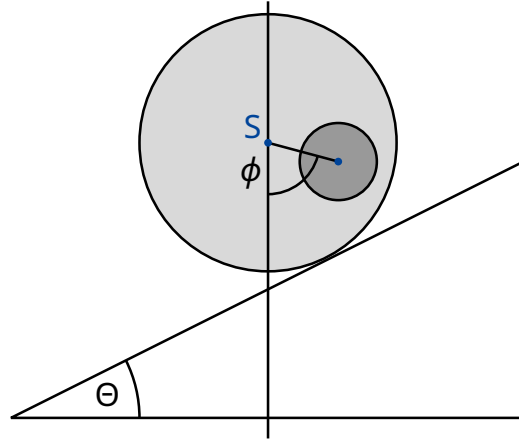


圖 2：傾斜基座上的圓柱體

**A.1** 找出  $b$  作為 (1) 中的物理量的函數，角度  $\phi$  及斜面傾角  $\Theta$ 。

0.8pt

從現在開始，我們可以假定  $b$  的數值是已知的。

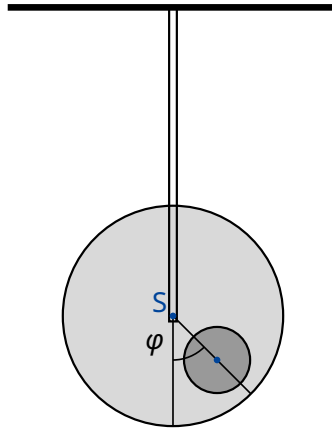


圖 3：懸垂系統。

接下來我們測量系統繞對稱軸  $S$  的轉動慣量  $I_S$ ，為此我們沿木圓柱體作為剛體棒的對稱軸上懸掛木圓柱體。我們接着將它撥離平衡位置一個小角度  $\varphi$ ，然後讓它自由運動。看圖 3 的實驗裝置。我們發現角度  $\varphi$  以週期  $T$  進行週期運動。

**A.2** 找出描述  $\varphi$  的運動方程。將系統繞它的對稱軸  $S$  的轉動慣量  $I_S$  用  $T$ 、 $b$  及 (1) 中其它已知的物理量表示。你可以假設，我們微擾平衡位置，所以  $\varphi$  總是一個小量。

從題 **A.1** 及 **A.2** 的實驗，我們現在想找出木圓柱體內的金屬圓盤的大小及位置。

**A.3** 找出距離  $d$  作為  $b$  及 (1) 中其它物理量的函數表達式。你可以在表達式將  $r_2$  及  $h_2$  看成是變量，因為它們將在題 **A.5** 中被計算。 0.4pt

**A.4** 找出轉動慣量  $I_S$  作為  $b$  及 (1) 中已知物理量的函數表達式。你可以在表達式將  $r_2$  及  $h_2$  看成是變量，因為它們將在題 **A.5** 中被計算。 0.7pt

**A.5** 用上述結果，寫下  $h_2$  及  $r_2$  作為  $b$ 、 $T$  及 (1) 中已知物理量的函數表達式。你可以將  $h_2$  寫作  $r_2$  的函數。 1.1pt

## B 部分－轉動的空間站 (6.5 分)

Alice 是一個住在太空站的太空人。太空站是個巨大的輪子，半徑為  $R$ ，繞對稱軸轉動，因此為太空人提供人造重力。太空人住在輪緣的內層。太空站的重力跟地板的曲率可以忽略。

**B.1** 要以多大的角頻率  $\omega_{ss}$  轉動，太空站才能令太空人感受到跟地面相同的重力  $g_E$ ？ 0.5pt

Alice 跟她的太空人朋友 Bob 有爭執。Bob 不相信他們實際上住在一個太空站，聲稱他們實際上在地球。Alice 想用物理向 Bob 證明他們實際上住在一個轉動的太空站。為此，她在一個彈性系數  $k$  的彈簧上繫上質點  $m$ ，然後讓彈簧振動。質點只在垂直方向上振動，不能在水平方向運動。

**B.2** 假定地球的重力是常數  $g_E$ ，一個地球的觀測者量到的振動角頻率  $\omega_E$  是多少？ 0.2pt

**B.3** Alice 在太空站測量到的振動角頻率  $\omega$  是多少？ 0.6pt

Alice 相信她的實驗證明他們住在一個轉動的太空站上。Bob 保持懷疑。他聲稱一旦考慮地表上方的重力改變，就可以觀測到類此的效應。

下面我們探討 Bob 是不是對的。

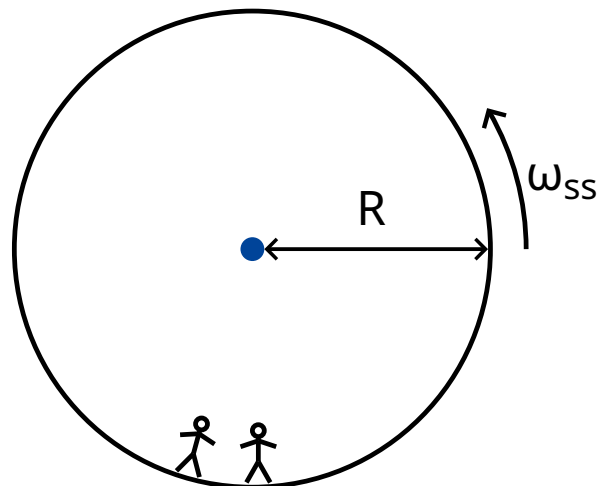


圖 4：太空站

- B.4** 推導重力  $g_E(h)$  作為地表高度  $h$  的表達式，計算振子的振動頻率  $\tilde{\omega}_E$ （線性近似就足夠）。記地球半徑是  $R_E$ 。忽略地球的轉動。 0.8pt

事實上，對這個太空站，Alice 的確發現她的彈簧擺的振動頻率正如 Bob 所預料。

- B.5** 太空站的半徑  $R$  要多大，振動頻率  $\omega$  才跟地上的振動頻率  $\tilde{\omega}_E$  相同？將你的答案用  $R_E$  表達。 0.3pt

被 Bob 的頑固激怒，Alice 想出一個實驗來證明她的觀點。為此她爬上太空站一個離地板高度為  $H$  的塔，讓一個質量落下。這個實驗可以在轉動的參考系上做，也可以在一個慣性參考系上做。

在均勻轉動的參考系，太空人感受到一個擬力  $\vec{F}_C$ ，叫科里奧利力。在一個以均勻角頻率  $\vec{\omega}_{ss}$  轉動的參考系內，作用在以速度  $\vec{v}$  運動的質點  $m$  上的擬力  $\vec{F}_C$ ，由下式給出：

$$\vec{F}_C = 2m\vec{v} \times \vec{\omega}_{ss}. \quad (2)$$

你或許會用到下面的標量關係

$$F_C = 2m v \omega_{ss} \sin \phi, \quad (3)$$

這裡  $\phi$  速度與轉動軸的夾角。這個力垂直於速度  $v$  及轉動軸，方向取決於右手定則，但在下面你可以自由選擇它的方向。

- B.6** 計算質量觸地時的水平速度  $v_x$  跟水平位移  $d_x$ （相對於塔的基線，垂直於塔的方向）。你可以假設塔的高度  $H$  很小，所以太空人在整個過程量到的加速度是常數。你也可以假設  $d_x \ll H$ 。 1.1pt

為了取得較好的實驗結果，Alice 決定在一個比之前高很多的塔上做實驗。令人意外的是，質量觸及地板時，落在塔的基線上，因此  $d_x = 0$ 。

- B.7** 找出塔的高度的下限，使有可能發生  $d_x = 0$  的情況。 1.3pt

Alice 願意試最後一次去說服 Bob。她打算用她的彈簧擺去顯示出科里奧利力的效應。最後，她改變了最初的實驗裝置：她將她的彈簧附在一個環上，圓環可以沿杆水平自由在  $x$  方向無摩擦滑動。彈簧本身在  $y$  方向振動。杆平行於地板，垂直於太空站的轉動軸。 $xy$  平面因此垂直於轉動軸， $y$  方向直接指向太空站的轉動中心。

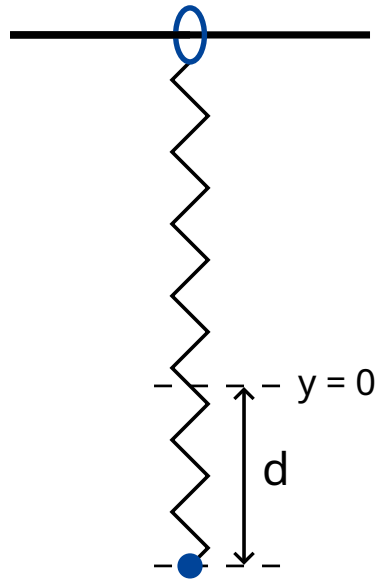


圖 5：實驗裝置。

- B.8** Alice 將質量自平衡位置  $x = 0, y = 0$  往下拉一段距離  $d$ ，然後讓它自由運動（看圖 5）。 1.7pt
- 找出  $x(t)$  跟  $y(t)$  的代數表達式。你可以假設  $\omega_{ss}d$  很小，忽略沿  $y$  軸的科里奧利力。
  - 畫出軌跡  $(x(t), y(t))$ ，標出所有重要特徵，例如振幅。

Alice 和 Bob 繼續爭論下去 .....