Dos Problemas de Mecánica (10 points)

Por favor asegúrate de leer las instrucciones generales dentro del sobre adjunto antes de comenzar a resolver este problema.

Parte A. El Disco Escondido (3.5 puntos)

Consideremos un cilindro sólido de madera de radio r_1 y grosor h_1. En algún lugar dentro del cilindro se tiene insertado un disco de metal de radio r_2 y grosor h_2. El disco de metal está ubicado de tal forma que su eje de simetría B se ubica paralelo al eje de simetría S del cilindro de madera. El disco de metal se coloca a la misma distancia de la caras superior e inferior del cilindro. Denotamos a la distancia entre S y B como d. La densidad de la madera es ρ_1, mientras que de la del metal es $\rho_2 > \rho_1$. La masa total del cilindro de madera con el disco dentro es M.

Se coloca el cilindro sobre una base horizontal de tal forma que pueda rodar libremente hacia la izquierda y la derecha. Vea la Figura 1 para una vista lateral y superior del sistema.

El objetivo de este problema es determinar el tamaño y la posición del disco de metal.

En lo que sigue, cuando se te pida expresar un resultado en términos de cantidades conocidas, considera que las cantidades conocidas son:

$$r_1,\ h_1,\ \rho_1,\ \rho_2, M\ . \tag{1}$$

El objetivo de este problema es determinar r_2, h_2 y d, a través de mediciones indirectas.

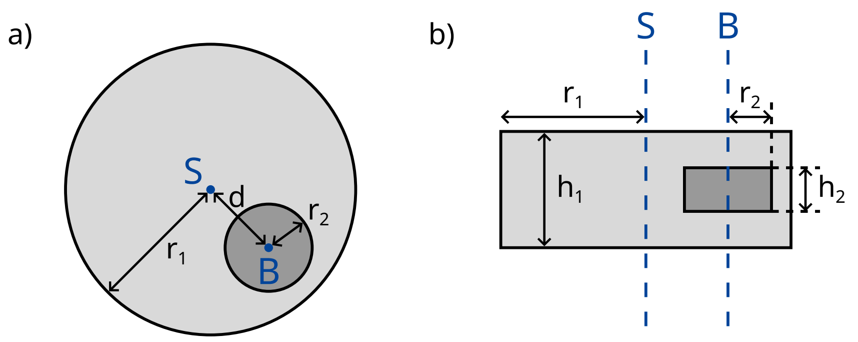

Figura 1: a) vista de frente y b) vista lateral, del cilindro

Llama b a la distancia entre el centro de masa C de todo el sistema y el eje de simetría S del cilindro. Para determinar esta distancia, se diseña el siguiente experimento: colocamos el cilindro sobre una base horizontal de manera que se halle en equilibrio estable. Ahora inclinamos la base lentamente hasta formar un ángulo Θ con la horizontal (ver Fig. 2). Como resultado de la fricción estática, el cilindro puede rodar libremente sin deslizar. Este va a rodar un poco hacia abajo, pero se observa que se detiene hasta alcanzar un equilibrio estable a un ángulo ϕ que es posible medir.

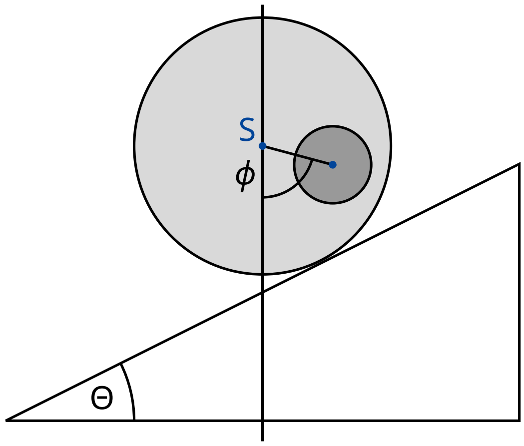

Figura 2: Cilindro sobre un plano inclinado.

A.1	Encuentra una expresión para b como función de cantidades conocidas (1), del ángulo ϕ y del ángulo de inclinación de la base Θ.	0.8pt

De ahora en adelante, podemos considerar que el valor de b está determinado.

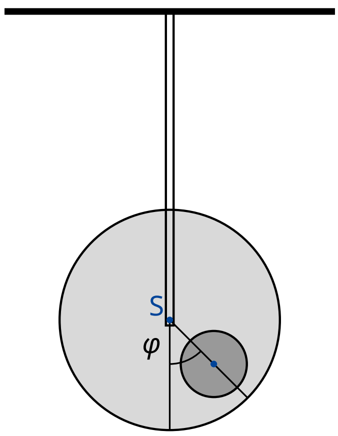

Figura 3: Cilindro suspendido

A continuación queremos medir el momento de inercia I_S del cilindro con respecto al eje de simetría S. Con este objetivo se suspende el cilindro, por medio de barras rígidas, tal que puede girar libremente alrededor de su eje de simetría S. Luego se hace girar un pequeño ángulo φ respecto de su posición de equilibrio y se suelta. Vea la figura 3 del montaje. Encontramos que φ describe un movimiento periódico con período T.

A.2	Encuentra la ecuación de movimiento para φ. Expresa el momento de inercia I_S del cilindro alrededor de su eje de simetría S en términos de T, b y las cantidades conocidas (1). Puedes suponer que sólo se perturba al cilindro ligeramente de la posición de equilibrio, de tal forma que φ siempre es pequeño.	0.5pt

A partir de las mediciones de las preguntas **A.1** y **A.2**, queremos determinar la geometría y la posición del disco de metal dentro del cilindro.

A.3	Encuentra una expresión para la distancia d como función de b y las cantidades conocidas (1). También puedes incluir r_2 y h_2 como variables en tu expresión, ya que van a ser calculadas en **A.5.**	0.4pt

A.4	Encuentre una expresión para el momento de inercia I_S en términos de b y las cantidades conocidas (1).También puedes incluir r_2 y h_2 como variables en tu expresión, ya que van a ser calculadas en **A.5.**	0.7pt

A.5	Usando todos los resultados anteriores, escribe una expresión para h_2 y $r_2$en términos de b, T y las cantidades conocidas (1). Debes expresar también h_2 como una función de r_2.	1.1pt

Parte B. Estación espacial en rotación (6.5 puntos)

Alice es una astronauta que vive en una estación espacial. La estación espacial es una rueda gigante de radio R rotando alrededor de su eje de tal forma que provee gravedad artificial a los astronautas. Los astronautas viven en el lado interior de la rueda. La atracción gravitacional de la estación espacial y la curvatura del suelo pueden ser ignorados.

B.1	¿Con qué frecuencia angular ω_{ss} debe rotar la estación espacial para que los astronautas experimenten la misma aceleración gravitacional g_E que en la superficie de la tierra?	0.5pt

Alice y su amigo astronauta Bob tienen un desacuerdo. Bob no cree que en realidad estén viviendo en una estación espacial sino en la Tierra. Alice quiere probarle a Bob, usando física, que en realidad viven en una estación espacial rotando. Con este objetivo, Alice sujeta una masa m a un resorte de constante elástica k y la deja oscilar de manera vertical al suelo y que no se puede mover en la dirección horizontal.

B.2	Suponiendo que la aceleración gravitacional sobre la tierra tiene un valor constante g_E, ¿cuál seria la frecuencia de oscilación ω_E del resorte que una persona mediría en la Tierra?	0.2pt

B.3	¿Qué frecuencia de oscilación ω del resorte medirá Alice sobre la estación espacial?	0.6pt

Alice esta convencida de que su experimento comprueba que se encuentran en una estación espacial rotando. Bob permanece escéptico. El asegura que al tomar en cuenta el cambio de la gravedad por encima de la superficie de la tierra, uno encuentra un efecto similar. En la siguiente pregunta investigaremos si Bob tiene razón.

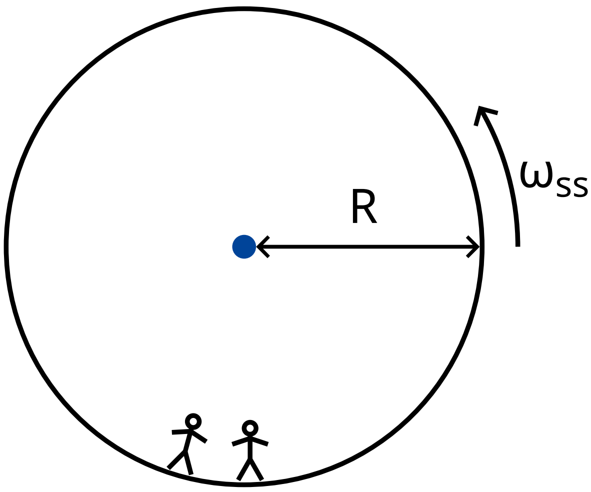

Figure 4: Estación espacial.

B.4	Deduce una expresión para la gravedad $g_E(h)$ para pequeñas altitudes h sobre la superficie de la tierra y calcula la frecuencia de oscilación del resorte $\tilde{\omega}_E$ (una aproximación lineal es suficiente). Denota al radio de la tierra como R_E. Desprecia la rotación de la Tierra.	0.8pt

En efecto, para la estación espacial, Alice encuentra que el resorte oscila con la frecuencia que Bob predijo.

B.5	¿Para qué radio R de la estación espacial coincidirá ω con la frecuencia de oscilación $\tilde{\omega}_E$ sobre la superficie de la tierra? Expresa tu respuesta en términos de R_E.	0.3pt

Exasperada con la terquedad de Bob, Alice logra encontrar un experimento que pruebe su afirmación. Para esto, sube a una torre de altura H con respecto al suelo de la estación espacial y suelta una masa. Este experimento puede ser entendido tanto en el sistema de referencia rotando, como en un sistema de referencia inercial.

En el sistema de referencia rotando de manera uniforme, los astronautas registran una fuerza ficticia $\vec{F}_C$ llamada fuerza de Coriolis. La fuerza $\vec{F}_C$ actuando sobre un objeto de masa m que se mueve con velocidad $\vec{v}$ en el marco de referencia rotando con frecuencia angular constante $\vec{\omega}_{ss}$ está dada por:

$$\vec{F}_C = 2m\vec{v} \times \vec{\omega}_{ss} \ . \tag{2}$$

En términos de cantidades escalares se puede usar:

$$F_C = 2mv\omega_{ss} \sin\phi \ , \tag{3}$$

donde ϕ es el ángulo entre la velocidad y el eje de rotación. La fuerza es perpendicular tanto a la velocidad v como al eje de rotación. El signo de la fuerza se puede determinar por medio de la regla de la mano derecha, pero en lo que sigue puedes escoger el signo como te convenga.

B.6	Calcula la velocidad horizontal v_x y el desplazamiento horizontal d_x (relativo a la base de la torre y en la dirección perpendicular a la torre) de la masa cuando golpea el suelo. Puedes suponer que la altura H de la torre es pequeña, de tal manera que la gravedad medida por los astronautas es constante durante la caída. También puedes suponer que $d_x \ll H$.	1.1pt

Para obtener un buen resultado, Alice decide llevar acabo el experimento en una torre mucho más alta que la anterior. Para su sorpresa, la masa golpea el suelo justo en la base de la torre, es decir en $d_x = 0$.

B.7	Encuentra una cota mínima de la altura para la cual sucede que $d_x = 0$.	1.3pt

Alice quiere intentar convencer a Bob una última vez. Ella quiere usar su oscilador con resorte para mostrar el efecto de la fuerza de Coriolis. Para esto, ella cambia el experimento original: ella cuelga el resorte de un anillo que puede deslizar libremente sobre una vara horizontal en la dirección x sin fricción. El resorte como tal oscila en la dirección y. La vara se encuentra paralela al suelo y perpendicular al eje de rotación de la estación espacial. El plano xy es por lo tanto perpendicular al eje de rotación, con la dirección y apuntando hacia el centro de rotación de la estación.

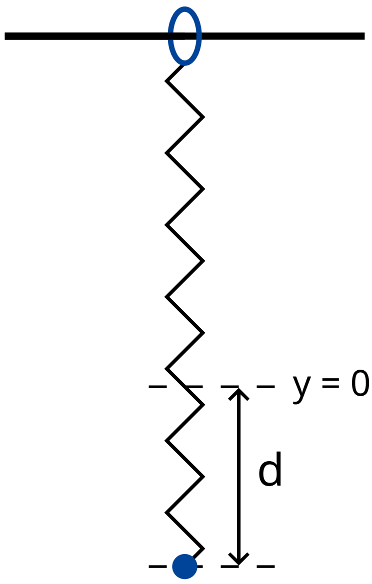

Figura 5: Montaje del experimento.

B.8	Alice jala la masa una distancia d hacia abajo con respecto al punto de equilibrio $x = 0$, $y = 0$, y luego la suelta (ver figura 5). • Encuentre una expresión algebraica para $x(t)$ y $y(t)$. Puedes suponer que $\omega_{ss} d$ es una cantidad pequeña y despreciar la fuerza de Coriolis para el movimiento a lo largo del eje y. • Dibuje la trayectoria $(x(t), y(t))$, marcando todas las características importantes tales como la amplitud.	1.7pt

Alice y Bob continúan discutiendo.