

Две задачи од механика (10 поени)

Ве молиме, пред да почнете со решавање на задачите, прочитајте ги општите напатствија дадени во одвоен плик.

Дел А. Скриен диск (3,5 поени)

Замислете цврст дрвен цилиндар со радиус r_1 и висина h_1 . Некаде во цилиндарот, дрвото е заменето со метален диск со радиус r_2 и дебелина h_2 . Металниот диск е така поставен што неговта оска на симетрија B е паралелна со оската на симетрија S на дрвениот цилиндар и поставен е на еднакви растојанија од основите на дрвениот цилиндар. Растојанието помеѓу двете оски на симетрија е означено со d . Дрвото има густина ρ_1 , а металот има густина $\rho_2 > \rho_1$. Вкупната маса на дрвениот цилиндар заедно со металниот диск внатре во него е M .

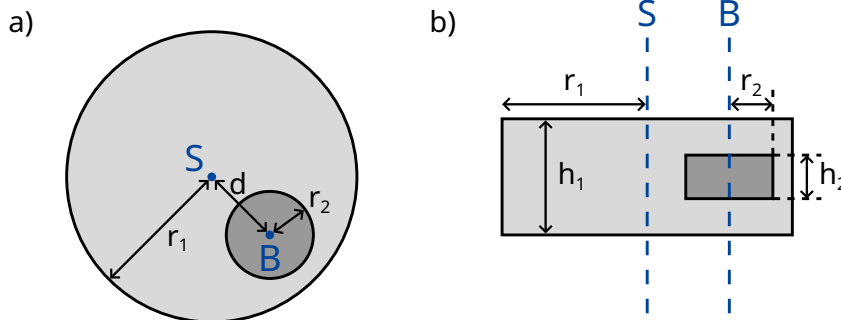
Во овој дел од задачата, цилиндарот го поставуваме на подлогата, така што да може слободно да ротира на лево или десно. На слика 1 е прикажан поглед на цилиндарот од страна и од горе.

Во овој дел треба да се определи големината и положбата на металниот диск.

Во она што следува понатаму, кога треба да се изрази некој величина во зависност од некои познати, претпоставуваме дека следните величини се познати:

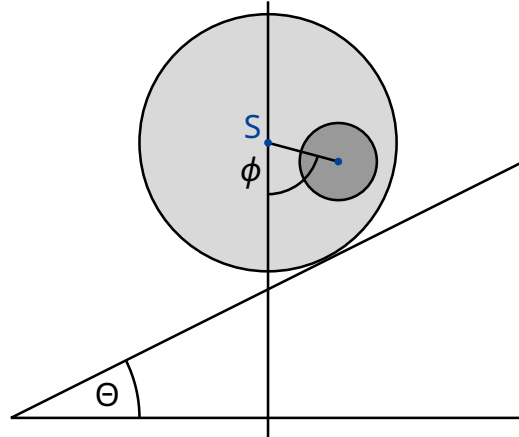
$$r_1, h_1, \rho_1, \rho_2, M. \quad (1)$$

Преку индиректно мерење да се определат величините r_2, h_2 и d .



Слика 1. а) поглед од страна б) поглед од горе

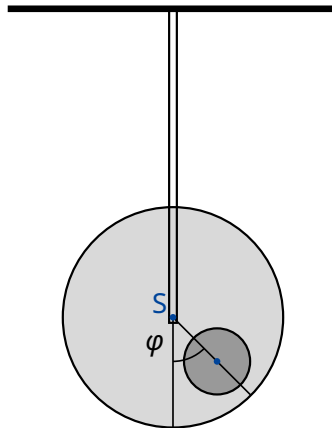
Со b е означуваме растојанието помеѓу центарот на маса C на целиот систем и оската на симетрија S на дрвениот цилиндар. За да го определиме ова растојание, изведен е следниот експеримент: Цилиндарот го поставуваме на хоризонтална подлога така што тој е во стабилна рамнотежа. Потоа, основата полека ја поткреваме за агол Θ (види слика 2). Како резултат на триењето при мирување, дрвениот цилиндар може да се тркала без лизгање. Тој ќе се стркала малку низ косата рамнина и ќе застане пак во стабилна рамнотежа завртувајќи се за агол ϕ кој агол може да го измериме, односно го сметаме за познат.



Слика 2. Цилиндарот поставен на коса рамнина.

A.1 Најди израз за b како функција од величините во (1), аголот ϕ и аголот на 0.8pt наклон на основата Θ .

Од сега па натаму ќе сметаме дека вредноста на b е позната.



Слика 3. Системот е обесен.

Понатаму, сакаме да го пресметаме моментот на инерција на цилиндарот I_S во однос на оската на симетрија S . За да го направиме тоа, цилиндарот го прикачуваме за таа оска на симетрија и го обесуваме на цврста прачка. Потоа, го отклонуваме од неговата рамнотежна состојба за мал агол φ и го пуштаме. Тоа е претставено на слика 3. Забележуваме дека аголот φ опишува периодично движење со период T .

- A.2** Најди ја равенката на движење за φ . Изрази го моментот на инерција I_S на цилиндарот во однос на оската S во зависност од T , b и познатите величини од (1). Може да се претпостави дека цилиндарот го отклонуваме од рамонтежната положба малку, така што φ е секогаш многу мало. 0.5pt

Од мерењата направени во деловите A.1 и A.2 може да ја определиме геометријата и положбата на металниот диск внатре во цилиндарот.

- A.3** Најди израз за растојанието d во зависност од b и познатите величини дадени во (1). Исто така и величините r_2 и h_2 може да ги внесете во изразот, со оглед на тоа дека тие ќе бидат пресметани подоцна во делот A.5. 0.4pt

- A.4** Најди израз за моментот на инерција I_S во зависност од b и познатите величини дадени во (1). Исто така и величините r_2 и h_2 може да ги внесете во изразот, со оглед на тоа дека тие ќе бидат пресметани подоцна во делот A.5. 0.7pt

- A.5** Со помош на резултатите добиени погоре, запиши израз за h_2 и r_2 во зависност од b , T и познатите величини од (1). Изразот за h_2 може да го дадеш преку r_2 . 1.1pt

Дел В. Вселенска станица што ротира (6,5 поени)

Ангела е астронаут што престојува на вселенска станица. Вселенската станица претставува огромно тркало со радиус R што ротира околу неговата оска со што создава сопствена/вештачка гравитација за астронаутите. Астронаутите престојуваат на внатрешната страна од обрачот на тркалото. Гравитационото привлекување на вселенската станица, а исто така и заобленоста на подот не треба да се земаат предвид.

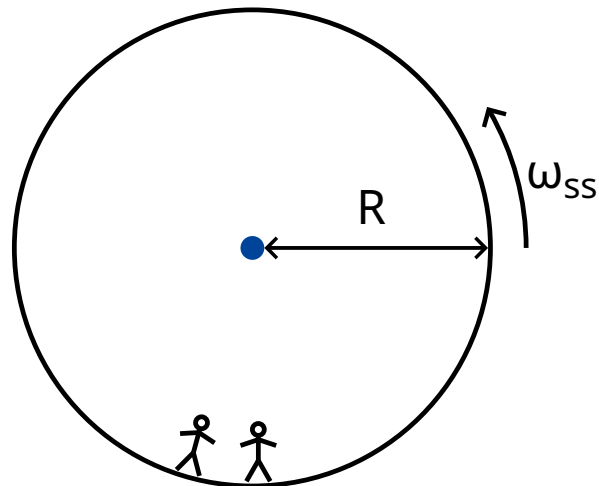
- B.1** Со колкава аголна брзина ω_{ss} треба да ротира вселенската станица за астронаутите на неа да чувствуваат исто гравитационо дејство што одговара на гравитационото забрзување на Земјата g_E ? 0.5pt

Ангела и нејзиниот другар астронаутот Дејан имаат мало несогласување. Дејан не верува дека тие навистина се наоѓаат на вселенска станица и тврди дека тие се на Земјата. Со помош на физиката, Ангела сака да му докаже на Дејан дека тие навистина се наоѓаат на вселенска станица која ротира. За таа цел, таа обесува пружина со константа на еластичност k а на неа закачува тело со маса m и го пушта системот да осцилира. Телото осцилира само во вертикален правец и не може да се придвижува во хоризонтален правец.

- B.2** Претпоставувајќи дека на површината на Земјата гравитационата сила е константна и е одредена со гравитационото забрзување на Земјата g_E , колкава би била кружната фреквенција на осцилирање на системот - ω_E на овој систем ако мерењето се изведува на Земјата? 0.2pt

- B.3** Колкава кружна фреквенција ω ќе измери Ангела за системот што осцилира на вселенската станица? 0.6pt

Ангела е убедена дека со овој експеримент му докажала на Дејан дека тие се наоѓаат на вселенска станица што ротира. Но Дејан е уште скептичен. Тој тврди дека ако се земе предвид промената за Земјиното забрзување со промена на висината над Земјата, тогаш би се добило сличен ефект. Во делот што следува ќе истражуваш дали тој е во право?



Слика 4. Вселенска станица

- B.4** Изведи израз за земјиното забрзување $g_E(h)$ за мали висини h над површината на Земјата и пресметај ја кружната фреквенција $\tilde{\omega}_E$ на телото што осцилира (доволно е ако се земе само линеарна апроксимација). За радиусот на Земјата земаме дека е R_E . Ротацијата на Земјата да не се зема предвид. 0.8pt

Навистина, за во вселенската станица, Ангела нашла дека телото обесено на пружина осцилира со фреквенција што ја предвидел Дејан.

- B.5** За кој радиус R на вселенската станица, фреквенцијата на осцилирање на системот ω , ќе биде еднаква со фреквенцијата $\tilde{\omega}_E$ што тој би ја имал ако се наоѓа на површината на Земјата. Одговорот изрази го преку R_E . 0.3pt

Гневна на тврдоглавоста на Дејан, Ангела доаѓа до идеја за експеримент со кој ќе докаже дека таа е во право. За таа цела таа се качува на кула која има висина H во однос на подот на вселенската станица и од таму пушта тело. Овој експеримент може да се разгледува во однос на системот што ротира, а исто така и во однос на инерцијален референтен систем.

Во систем што ротира се јавува инерцијална сила \vec{F}_C , наречена Кориолисовата сила. Таа сила \vec{F}_C што дејствува на тело со маса m кое се движи со брзина \vec{v} во систем што ротира со константна аголна брзина $\vec{\omega}_{ss}$ е дадена со

$$\vec{F}_C = 2m\vec{v} \times \vec{\omega}_{ss} . \quad (2)$$

Во скаларен облик може да се запише

$$F_C = 2mv\omega_{ss} \sin \phi, \quad (3)$$

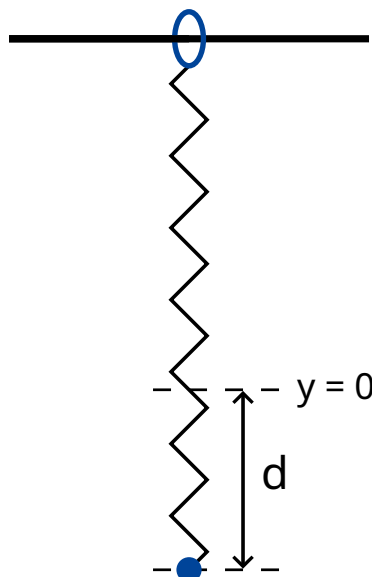
каде ϕ е агол меѓу брзината и оската на ротација. Силата е нормална и на брзината и на оската на ротација. Насоката на силата може да се определи според правилото на десната рака, но во она што следува таа може да се земе произволно.

- B.6** Пресметај ја хоризонталната компонента на брзината v_x и хоризонталното поместување d_x (во однос на подножјето на кулата, а во правец нормален на кулата) на телото во моментот кога тоа паѓа на подот. Може да земеш дека висината на H на кулата е мала, така што забрзувањето на телото за време на паѓањето е константно. Исто така, може да земеш дека $d_x \ll H$. 1.1pt

За да добие подобар резултат, Ангела одлучува да го направи овој експеримент повторно, но сега од многу повисока кула. На нејзино изненадување, телото паѓа на подот веднаш до подножјето на кулатата, така што $d_x = 0$.

- B.7** Најди ја најмалата висина на кулата за која може да се добие вредност $d_x = 0$. 1.3pt

Ангела сака да го направи последниот обид за да го убеди Дејан. Таа сака да го искористи незиниот систем, т.е. осцилаторот за да го покаже ефектот од Кориолисовата сила. За да го направи ова таа прави некои промени во оригиналната поставка: таа ја закачува пружината за прстен кој може слободно да се лизга без триење по хоризонтално поставена прачка во x насока. Самата пружина осцилира во y правец. Прачката е поставена паралелно на основата, а нормално на оската на ротација на вселенската станица. На тој начин, xy рамнината е нормална на оската на ротација, при што правецот y минува низ центарот на ротација на станицата.



Слика 5. Експериментална поставка

- B.8** Ангела го повлекува телото вертикално надолу за растојание d во однос на рамнотежната положба $x = 0, y = 0$, и потоа го пушта да осцилира (види слика 5). 1.7pt
- Запиши алгебарски израз за $x(t)$ и $y(t)$. Може да сметаш дека $\omega_{ss}d$ е мало. Не ја земај предвид Кориолисовата сила што дејствува во правец на y оската.
 - Скицирај ја траекторијата $(x(t), y(t))$ и обележи ги сите важни точки и растојанија, како на пример амплитудата.

Дискусијата помеѓу Ангела и Дејан продолжува.