Twee problemen uit de Mechanica (10 punten)

Lees eerst de algemene instructies uit de aparte enveloppe voordat je begint met deze opgave.

Deel A. De verborgen schijf (3.5 punten)

We beschouwen een massieve houten cilinder met straal r_1 en dikte h_1. Ergens in de houten cilinder is het hout vervangen door een metalen schijf met straal r_2 en dikte h_2. De metalen schijf is zodanig geplaatst dat zijn symmetrie-as B evenwijdig is aan de symmetrie-as S van de houten cilinder. De metalen schijf is zo geplaatst dat de afstand tot de boven- en onderkant van de houten cilinder gelijk is. De afstand tussen S en B is d. De dichtheid van hout is ρ_1 en de dichtheid van metaal is $\rho_2 > \rho_1$. De totale massa van de houten cilinder met verborgen metalen schijf is samen gelijk aan M.

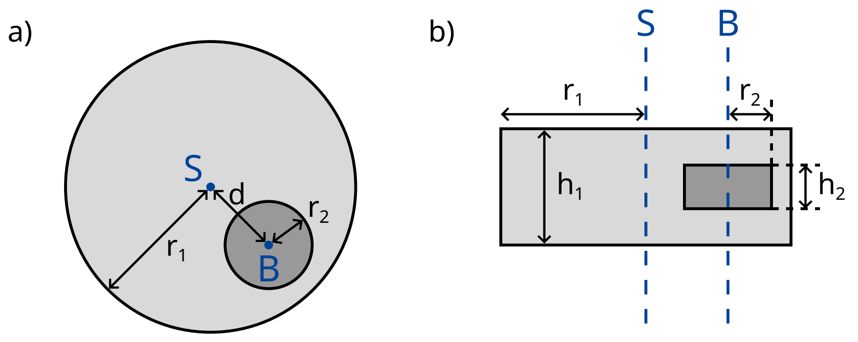
In dit probleem plaatsen we de houten cilinder op de grond zodat deze vrij naar links of rechts kan rollen. In figuur 1 is een zijaanzicht alsook een bovenaanzicht van het systeem gegeven.

Het doel van deze opdracht is om de afmetingen en de positie van de metalen schijf te bepalen.

Bij de volgende vragen mag je jouw antwoord uitdrukken in termen van de grootheden die bekend worden verondersteld:

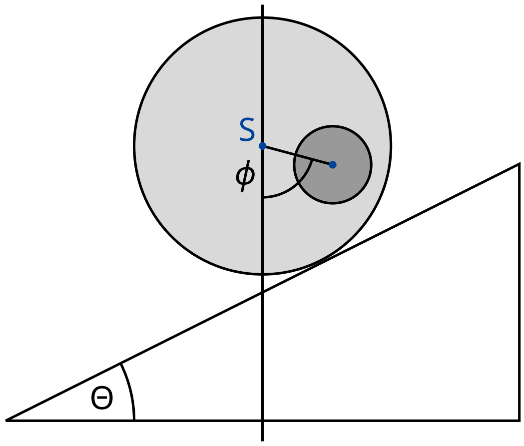
$$r_1,\ h_1,\ \rho_1,\ \rho_2, M\ . \tag{1}$$

Het doel is om r_2, h_2 en d indirect te bepalen.



Figuur 1: a) zijaanzicht b) bovenaanzicht

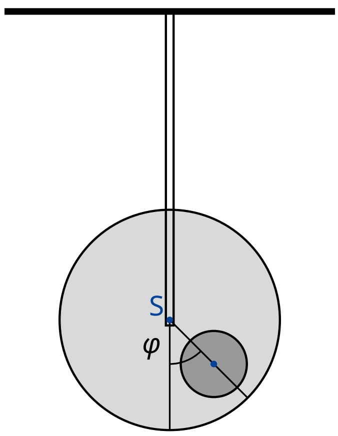
We definiëren b als de afstand tussen het massamiddelpunt C van het gehele systeem en de symmetrie-as S van de houten cilinder. Om deze afstand te bepalen, voeren we het volgende experiment uit: we plaatsen de houten cilinder op een horizontaal vlak zodanig dat het systeem in een stabiel evenwicht verkeert. Dit horizontaal vlak wordt voorzichtig aan één kant opgetild onder een hoek θ (zie figuur 2). Als gevolg van de statische wrijving kan de houten cilinder vrij rollen zonder te slippen. Deze zal een beetje naar beneden rollen op het hellend vlak, maar zal tot rust komen in een stabiel evenwicht nadat de cilinder over een hoek ϕ is geroteerd. Deze hoek ϕ wordt gemeten.



Figuur 2: Cilinder geplaatst op een hellend vlak.

A.1	Geef een uitdrukking voor b als functie van de grootheden in (1), de rotatiehoek ϕ en de hellingshoek Θ.	0.8pt

Vanaf nu mag de waarde van b als bekend worden verondersteld.



Figuur 3: Opgehangen systeem.

Nu willen we het traagheidsmoment I_S van het systeem bepalen ten opzichte van de symmetrie-as S. Hiervoor hangen we de houten cilinder op zijn symmetrie-as aan een starre staaf. We draaien de cilinder over een kleine hoek φ vanuit zijn evenwichtspositie en laten deze vrij draaien. De opstelling is weergegeven in figuur 3. We vinden dat φ een periodieke beweging beschrijft met periode T.

A.2	Geef de bewegingsvergelijking voor φ. Druk het traagheidsmoment I_S van het systeem (opgehangen cilinder uit figuur 3) om zijn symmetrie-as S uit als functie van T, b en de bekende grootheden uit (1). Je mag aannemen dat we de evenwichtspositie slechts met een kleine hoek verstoren zodanig dat φ altijd erg klein is.	0.5pt

Met de antwoorden uit **A.1** en **A.2**, willen we nu de geometrie en positie van de metalen schijf in de houten cilinder bepalen.

A.3	Geef een uitdrukking voor de afstand d als functie van b en de grootheden uit (1). Je mag r_2 en h_2 als variabelen opnemen in je uitdrukking, omdat ze berekend worden in onderdeel **A.5**.	0.4pt

A.4	Geef een uitdrukking voor het traagheidsmoment I_S als functie van b en de grootheden uit (1). Je mag r_2 en h_2 als variabelen opnemen in je uitdrukking, omdat ze berekend worden in onderdeel **A.5**.	0.7pt

A.5	Gebruik alle bovenstaande resultaten om een uitdrukking te vinden voor h_2 en r_2 als functie van T, b en de bekende grootheden uit (1). Je mag h_2 uitdrukken als functie van r_2.	1.1pt

Deel B. Roterend ruimtestation (6.5 punten)

Alice is een astronaut die woont op een ruimtestation. Het ruimtestation is een enorm groot wiel met straal R en roteert om zijn as, waardoor het de astronauten voorziet van kunstmatige gravitatie. De astronauten wonen aan de binnenzijde van de velg van het wiel. De aantrekkingskracht van het ruimtestation en de kromming van de vloer mogen verwaarloosd worden.

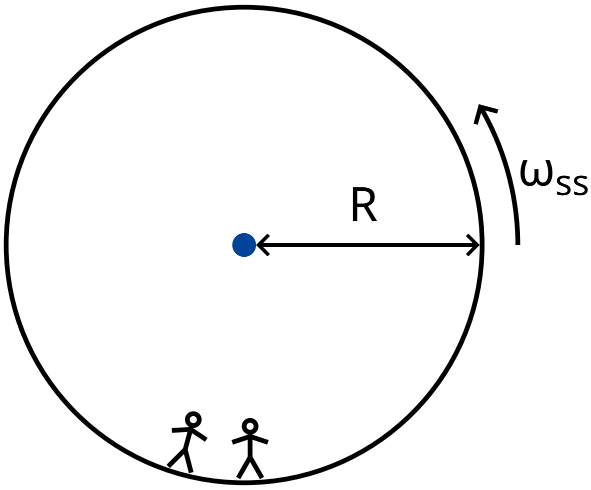
B.1	Bij welke hoeksnelheid ω_{ss} van het ruimtestation ervaren de astronauten dezelfde gravitatieversnelling g_E als op het aardoppervlak?	0.5pt

Alice en haar collega Bob hebben een meningsverschil. Bob gelooft niet dat ze wonen op een ruimtestation, maar beweert dat ze gewoon op de aarde wonen. Alice wil Bob met behulp van natuurkunde overtuigen dat ze wel op een roterend ruimtestation wonen. Hiervoor bevestigt ze een massa m aan een veer met veerconstante k en laat het geheel trillen. De massa trilt alleen in verticale richting en kan niet bewegen in de horizontale richting.

B.2	Aannemend dat op aarde de gravitatieversnelling constant en gelijk is aan g_E, wat is dan de hoekfrequentie ω_E die een persoon op aarde zou meten?	0.2pt

B.3	Welke hoekfrequentie ω meet Alice op het ruimtestation?	0.6pt

Alice is ervan overtuigd dat haar experiment bewijst dat ze wonen op een roterend ruimtestation. Bob blijft echter sceptisch. Hij beweert dat je hetzelfde effect krijgt indien je rekening houdt met de verandering in gravitatieversnelling boven de Aarde. In de volgende opdrachten onderzoeken we of Bob gelijk heeft.



Figuur 4: Ruimtestation

B.4	Leid een uitdrukking af voor de gravitatieversnelling $g_E(h)$ voor kleine hoogtes h boven het aardoppervlak en bepaal de hoekfrequentie $\tilde{\omega}_E$ van de trillende massa (lineaire benadering is voldoende). We benoemen de straal van de aarde als R_E. Verwaarloos de rotatie van de aarde.	0.8pt

Inderdaad, voor dit ruimtestation vindt Alice dat het massa-veer systeem met dezelfde frequentie trilt die Bob heeft voorspeld.

B.5	Voor welke straal R van het ruimtestation zijn de hoekfrequentie ω en de hoekfrequentie $\tilde{\omega}_E$ op het aardoppervlak gelijk aan elkaar? Druk je antwoord uit in termen van R_E.	0.3pt

Verbitterd door Bob's eigenwijsheid, komt Alice met een experiment om Bob te overtuigen. Hiervoor klimt ze op een toren met hoogte H boven de vloer van het ruimtestation en laat een massa vallen. Dit experiment kan bekeken worden in zowel een roterend assenstelsel als in een inertiaalstelsel.

In een eenparig roterend assenstelsel ondervinden de astronauten een fictieve kracht $\vec{F}_C$, die Coriolis kracht genoemd wordt. De kracht $\vec{F}_C$, die werkt op een object met massa m welke beweegt met een snelheid $\vec{v}$ in een roterend assenstelsel met een constante hoekfrequentie $\vec{\omega}_{ss}$, wordt gegeven door

$$\vec{F}_C = 2m\vec{v} \times \vec{\omega}_{ss} \, . \tag{2}$$

Met scalaire grootheden kun je gebruik maken van

$$F_C = 2mv\omega_{ss} \sin\phi \, , \tag{3}$$

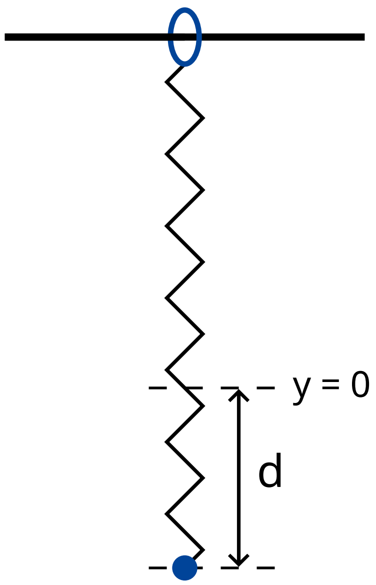
waarbij ϕ de hoek is tussen de snelheid en rotatie-as. De kracht staat loodrecht op zowel de snelheid v als de rotatie-as. De richting van de kracht kan worden bepaald met behulp van de rechterhandregel, maar mag in de onderstaande opgaven ook vrij gekozen worden.

B.6	Bereken voor de massa de horizontale snelheid v_x en de horizontale verplaatsing d_x (relatief ten opzichte van de as van de toren en in de richting loodrecht op de toren) op het tijdstip dat het de vloer raakt. Je mag aannemen dat de hoogte H van de toren klein is, zodat de versnelling zoals gemeten door de astronauten constant is tijdens de valbeweging. Neem ook aan dat $d_x \ll H$.	1.1pt

Om een goed resultaat te krijgen, besluit Alice om haar experiment uit te voeren bij een veel hogere toren. Tot haar verbazing, raakt de massa de vloer precies bij de as van toren, zodat $d_x = 0$.

B.7	Geef een ondergrens voor de hoogte van de toren waarbij het kan gebeuren dat $d_x = 0$.	1.3pt

Alice doet een laatste poging om Bob te overtuigen. Ze wil haar massa-veer systeem gebruiken om het effect te tonen van de Coriolis kracht. Hiervoor verandert ze haar oorspronkelijke opstelling: ze bevestigt de veer aan een ring die zonder wrijving vrij kan schuiven in de horizontale x richting langs een horizontaal geplaatste staaf. Het massa-veer systeem zelf trilt in de y richting. De staaf is evenwijdig aan de vloer en staat loodrecht op de rotatie-as van het ruimtestation. Het xy-vlak staat dus loodrecht op de rotatie-as, waarbij de y richting direct gericht is naar het draaipunt (rotatiecentrum) van het ruimtestation.



Figuur 5: Meetopstelling

B.8	Alice trekt de massa vanuit het evenwichtspunt $x = 0$, $y = 0$ over een afstand d naar beneden, en laat het daarna los (zie figuur 5). • Geef een uitdrukking voor $x(t)$ en $y(t)$. Je mag aannemen dat $\omega_{ss} d$ klein is en verwaarloos de Coriolis kracht voor beweging langs de y-as. • Geef een schets van de baan $(x(t), y(t))$, waarbij je alle belangrijke kenmerken, zoals de amplitude, aangeeft.	1.7pt

Alice en Bob blijven discussiëren.