To problemer i mekanikk (10 poeng)

Vær vennlig å lese de generelle instruksjonene i den separate konvolutten før du begynner på dette problemet.

Del A. Den gjemte disken (3,5 poeng)

Vi ser på en massiv tresylinder med radius r_1 og tykkelse h_1. Et sted inne i tresylinderen har treet blitt erstattet av en metalldisk med radius r_2 og tykkelse h_2. Metalldisken er plassert på en slik måte at dens symmetriakse B er parallell med symmetriaksen S til tresylinderen, og er plassert med samme avstand til topp- og bunnstykket av tresylinderen. Vi kaller avstanden mellom S og B for d. Massetettheten til treverket er ρ_1, massetettheten til metallet er $\rho_2 > \rho_1$. Den totale massen av tresylinderen og metalldisken er M.

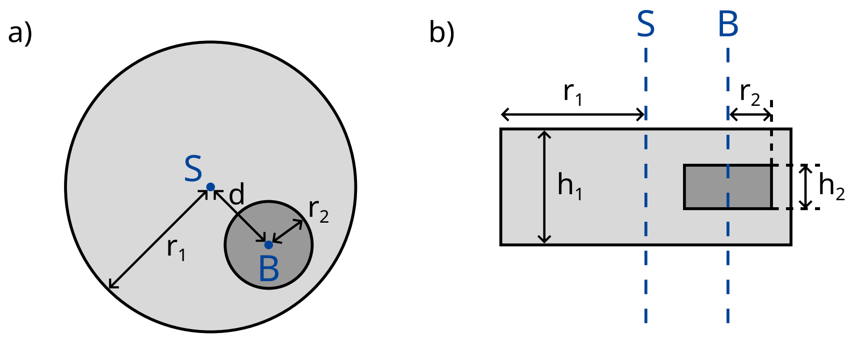
I denne oppgaven plasserer vi tresylinderen slik at den kan rulle fritt til venstre og høyre. Se Fig. 1 for å se oppsettet fra siden og fra toppen.

Målet med denne oppgaven er å bestemme størrelsen og posisjonen til metalldisken.

I det følgende kan du alltid anta at følgende er kjent når du blir spurt om å uttrykke resultatet med kjente størrelser:

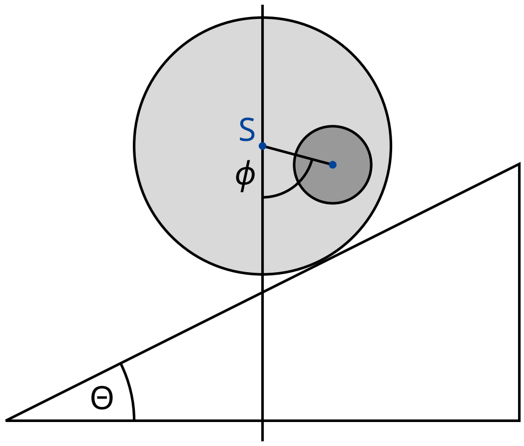
$$r_1,\ h_1,\ \rho_1,\ \rho_2, M\ . \tag{1}$$

Målet er å bestemme r_2, h_2 og d, ved indirekte målinger.



Figur 1: a) Sett fra siden, b) sett fra toppen

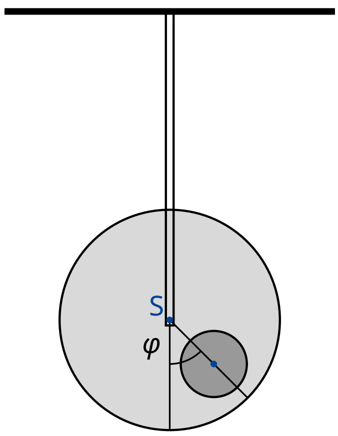
Vi kaller avstanden mellom massesenteret C til hele systemet og symmetriaksen S til tresylinderen for b. For å bestemme denne avstanden, setter vi opp det følgende eksperimentet: Vi plasserer tresylinderen på en horisontal base på en slik måte at den er i en stabil likevektsstilling. La oss nå sakte skråstille basen med en vinkel Θ (se Fig. 2). Som følge av den statiske friksjonen kan tresylinderen rulle fritt uten å gli. Den vil rulle litt ned skråplanet, men den legger seg til ro i en stabil likevektsstilling etter å ha rotert en vinkel ϕ som vi måler.



Figur 2: Sylinderen på et skråplan.

A.1	Finn et uttrykk for b som en funksjon av størrelsene (1), vinkelen ϕ og helningsvinkelen Θ til skråplanet.	0.8pt

Fra nå av kan vi anta at verdien til b er kjent.



Figur 3: Opphengt system

Vi ønsker nå å måle treghetsmomentet I_S til systemet med hensyn til symmetriaksen S. Til dette formålet så henger vi tresylinderen opp etter symmetriaksen i en uelastisk stang. Vi vrir den så vekk fra likevektsstillingen med en liten vinkel φ og slipper den. Se figur 3 for oppsettet. Vi finner at φ beskriver en periodisk bevegelse med periode T.

A.2	Finn bevegelseslikningen for φ. Uttrykk treghetsmomentet I_S til systemet rundt dens symmetriakse S uttrykt ved hjelp av T, b og de kjente størrelsene (1). Du kan anta at vi bare så vidt avviker fra likevektsstillingen slik at φ alltid er veldig liten.	0.5pt

Fra målingene i spørsmål **A.1** og **A.2** ønsker vi nå å bestemme geometrien til metalldisken inne i tresylinderen.

A.3	Finn et uttryk for avstanden d som en funksjon av b og størrelsene (1). Du kan også inkludere r_2 og h_2 som variabler i uttrykket ditt etter som de vil bli beregnet i oppgave **A.5**.	0.4pt

A.4	Finn et uttrykk for treghetsmomentet I_S uttrykt ved b og de kjente størrelsene (1). Du kan også inkludere r_2 og h_2 som variabler i uttrykket ditt etter som de vil bli beregnet it oppgave **A.5**.	0.7pt

A.5	Ved å bruke alle resultatene funnet ovenfor, skriv ned et uttrykk for h_2 og r_2 uttrykt ved hjelp av b, T og de kjente størrelsene (1). Du kan uttrykke h_2 som en funksjon av r_2.	1.1pt

Del B. Roterende romstasjon (6,5 poeng)

Alice er en astronaut som lever å en romstasjon. Romstasjonen er et gigantisk hjul med radius R som roterer rundt sin akse, og derved gir kunstig gravitasjon for astronautene. Astronautene bor på innsiden av felgen på hjulet. Se bort fra den gravitasjonelle tiltrekningen fra romstasjonen og krumningen av gulvet.

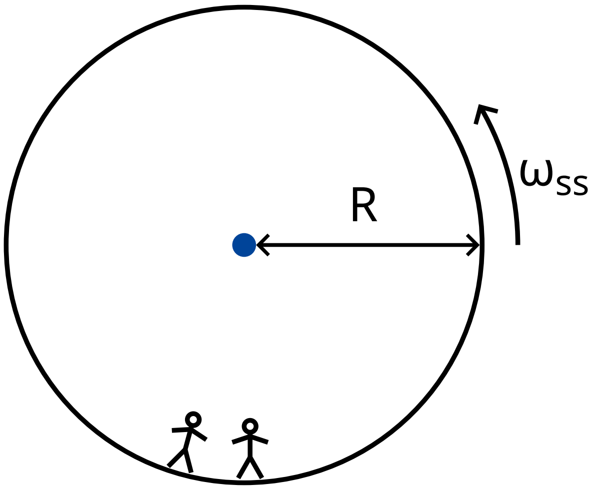
B.1	Med hvilken vinkelfrekvensen(/vinkelfart) ω_{ss} roterer romstasjonen slik at astronautene opplever den samme gravitasjonen g_E som på jordas overflate?	0.5pt

Alice og astronautvennen hennes, Bob, har en diskusjon. Bob tror ikke at de faktisk lever på en romstasjon og hevder at de er på jorda. Alice ønsker å bevise for Bob at de bor på en roterende romstasjon ved hjelp av fysikk. Til dette formålet fester hun gjenstand med masse m i en fjær med fjærkonstant k og lar den svinge (oscillere). Gjenstanden svinger bare i vertikal retning og kan ikke bevege seg horisontalt.

B.2	Ved å anta at jordas gravitasjon er konstant med tyngdeakselerasjon g_E, hva ville vinkelfrekvensen til svingningene ω_E bli målt til av en person på jorden?	0.2pt

B.3	Hvilken vinkelfrekvens til svingningene ω måler Alice på romstasjonen?	0.6pt

Alice er overbevist om at hennes eksperiment beviser at de er på en roterende romstasjon. Bob forblir skeptisk. Han hevder at når man tar hensyn til endringen i gravitasjonen som følge av høyden over jordoverflaten, vil man finne liknende effekter. I de følgende oppgavene undersøker vi om Bob har rett.



Figur 4: Romstasjon

B.4	Finn et uttrykk for tyngdeakselerasjonen $g_E(h)$ for små høyder h over jordoverflaten og beregn svingefrekvensen $\tilde{\omega}_E$ til den svingende gjenstanden (lineær tilnærming er nok). Kall jordradien R_E. Se bort fra jordrotasjonen.	0.8pt

Faktisk finner Alice ut at for denne romstasjonen så svinger fjærpendelen med frekvensen som Bob forutså.

B.5	For hvilken radius R av romstasjonen vil svingefrekvensen ω være den samme som svingefrekvensen $\tilde{\omega}_E$ på jorda? Uttrykk svaret ved hjelp av R_E.	0.3pt

Oppgitt over Bobs stahet finner Alice på et eksperiment for å bevise poenget sitt. Derfor klatrer hun opp i et tårn med høyde H over gulvet til romstasjonen og slipper en gjenstand. Dette eksperimentet kan forstås både i det roterende referansesystemet såvel som i et treghetssystem.

I et jevnt roterende referansesystem vil astronautene oppfatte en fiktiv kraft $\vec{F}_C$ kalt Coriolis-kraften. Kraften $\vec{F}_C$ virker på en gjenstand med masse m som beveger seg med en hastighet $\vec{v}$ i et roterende referansesystem med konstant vinkelfrekvens $\vec{\omega}_{ss}$ gitt ved

$$\vec{F}_C = 2m\vec{v} \times \vec{\omega}_{ss} \; . \tag{2}$$

Uttrykt med skalarstørrelser kan du bruke

$$F_C = 2mv\omega_{ss} \sin\phi \; , \tag{3}$$

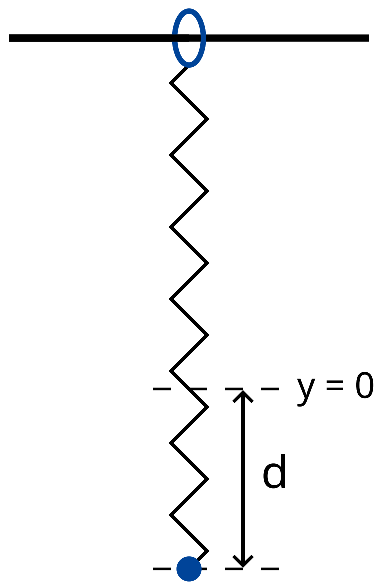
hvor ϕ er vinkelen mellom farten og rotasjonsaksen. Kraften er vinkelrett på både farten v og rotasjonsaksen. Fortegnet til kraften kan bestemmes ved hjelp av høyrehåndsregelen, men i det følgende kan du velge den fritt.

B.6 Beregn den horisontale farten v_x og den horisontale forskyvningen d_x (relativt til grunnflaten til tårnet, i retningen vinkelrett på tårnet) til gjenstanden i det den treffer gulvet. Du kan anta at høyden H til tårnet er liten slik at akselerasjonen som er målt av astronautene er konstant gjennom hele fallet. Du kan også anta at $d_x \ll H$. 1.1pt

For å få et godt resultat bestemmer Alice seg for å gjennomføre eksperimentet fra et mye høyere tårn enn tidligere. Til hennes overraskelse treffer gjenstanden gulvet ved bunnen av tårnet slik at $d_x = 0$.

B.7 Finn den laveste høyden på tårnet hvor det kan skje at $d_x = 0$. 1.3pt

Alice er villig til å gjøre et siste forsøk for å overbevise Bob. Hun ønsker å bruke fjæroscillatoren til å vise effekten av Coriolis-kraften. Hun endrer derfor det opprinnelige oppsettet: Hun fester fjæren til en ring som kan gli fritt på en horisontal stang i x-retning uten friksjon. Fjæren svinger i y-retning. Stangen er parallell med gulvet og er vinkelrett på rotasjonsaksen til romstasjonen, med y-retningen pekende rett inn mot rotasjonssenteret for romstasjonen.



Figur 5: Oppsett.

B.8 Alice trekker gjenstanden i en avstand d nedover fra likevektsstillingen $x = 0$, $y = 0$, og slipper den (se figur 5). 1.7pt

- Finn et algebraisk uttrykk for $x(t)$ og $y(t)$. Du kan anta at $\omega_{ss} d$ er liten og du kan se bort fra Coriolis-kraften for bevegelsen langs y-aksen.
- Skisser banen $(x(t), y(t))$, og marker alle viktige karakteristiske egenskaper slik som amplitude.

Alice og Bob fortsetter å argumentere.