

## Две задачи по механике (10 баллов)

Прежде, чем приступить к решению задачи, прочитайте инструкцию.

### Часть А. Спрятанный диск (3,5 балла)

Рассмотрим твердый деревянный цилиндр радиуса  $r_1$  и толщиной  $h_1$ . Где-то внутри деревянного цилиндра древесина заменена на металлический диск радиуса  $r_2$  и толщиной  $h_2$ . Металлический диск установлен так, что его ось симметрии  $B$  параллельна оси симметрии  $S$  деревянного цилиндра. Диск находится на одинаковых расстояниях от верхнего и нижнего оснований деревянного цилиндра. Обозначим расстояние между осями  $S$  и  $B$  как  $d$ . Плотность древесины  $\rho_1$ , плотность металла  $\rho_2 > \rho_1$ . Суммарная масса деревянного цилиндра с металлическим диском равна  $M$ .

В этом задании поместим деревянный цилиндр на плоскость так, что он может свободно вращаться направо-налево. На рис. 1 показаны виды цилиндра с торца и сверху.

Цель этого задания — определить размеры и место расположения металлического диска.

Считайте, что следующие величины заданы:

$$r_1, h_1, \rho_1, \rho_2, M. \quad (1)$$

Цель — определить  $r_2$ ,  $h_2$  и  $d$  путем косвенных измерений.

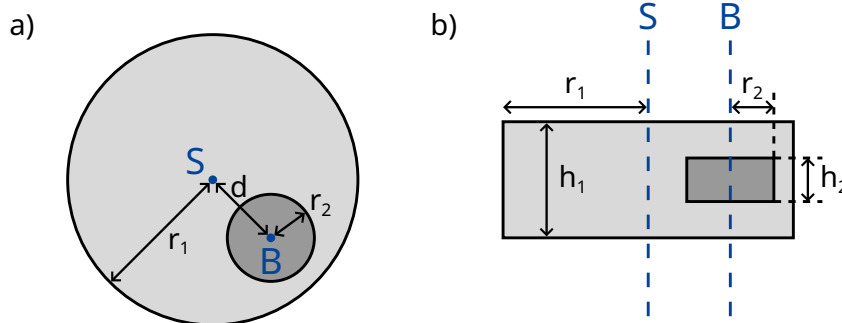


Рис. 1. а) вид с торца цилиндра б) вид сверху

Расстояние между центром масс всей системы  $C$  и осью симметрии деревянного цилиндра  $S$  равно  $b$ . Для того, чтобы определить это расстояние, рассмотрим следующий эксперимент: деревянный цилиндр установлен на горизонтальной плоскости так, что он находится в устойчивом равновесии. Медленно наклоним плоскость на угол  $\Theta$  (см. рис. 2). Из-за наличия трения деревянный цилиндр может свободно вращаться без проскальзывания. Он чуть-чуть скатится вниз, а затем придет в состояние устойчивого равновесия после поворота на угол  $\phi$ , который можно измерить.

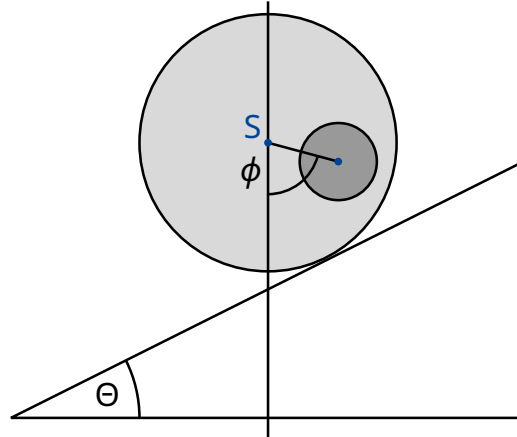


Рис. 2. Цилиндр на наклонной плоскости.

- A.1** Получите выражение для  $b$  как функцию величин (1), угла  $\phi$  и угла наклона плоскости  $\Theta$ . 0.8pt

С этого момента считаем, что величина  $b$  известна.

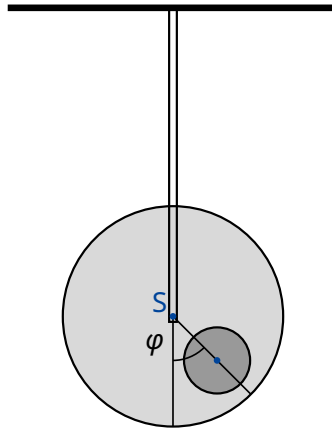


Рис. 3. Подвешенная система.

Теперь мы хотим измерить момент инерции  $I_S$  системы относительно оси симметрии  $S$ . Для этого закрепим деревянный цилиндр за его ось симметрии с помощью жесткого стержня. Затем повернем его относительно положения равновесия на небольшой угол  $\varphi$  и отпустим его. Схема эксперимента показана на рис. 3. Окажется, что  $\varphi$  меняется периодически с периодом  $T$ .

- A.2** Получите уравнение движения, используя  $\varphi$  в качестве переменной. Выразите момент инерции цилиндра  $I_S$  относительно его оси симметрии  $S$  через  $T$ ,  $b$  и известные величины (1). Считайте, что отклонение от положения равновесия невелико, так что угол  $\varphi$  можно считать малой. 0.5pt

Используя результаты измерений из пунктов **A.1** и **A.2**, определим геометрические размеры металлического диска и его положение внутри деревянного цилиндра.

**A.3** Получите выражение для расстояния  $d$  как функцию  $b$  и величин (1). Вы можете также включить в ваше выражение в качестве переменных  $r_2$  и  $h_2$ , т.к. они будут вычислены в пункте **A.5**. 0.4pt

**A.4** Получите выражение для момента инерции  $I_S$  как функцию  $b$  и известных величин (1). Вы можете также включить в ваше выражение в качестве переменных  $r_2$  и  $h_2$ , т.к. они будут вычислены в пункте **A.5**. 0.7pt

**A.5** Используя полученные выше результаты, запишите выражения для  $h_2$  и  $r_2$  через  $b$ ,  $T$  и известные величины (1). Вы можете выразить  $h_2$  как функцию  $r_2$ . 1.1pt

## Часть В. Вращающаяся космическая станция (6,5 баллов)

Алиса — космонавт, она живет на космической станции. Космическая станция представляет собой гигантское колесо радиуса  $R$ , которое вращается вокруг своей оси, тем самым создавая для космонавтов искусственную гравитацию. Космонавты живут на внутренней стороне обода колеса. Силой гравитационного притяжения космической станции и кривизной пола можно пренебречь.

**B.1** С какой циклической частотой  $\omega_{ss}$  должна вращаться станция, чтобы космонавты испытывали такое же ускорение свободного падения  $g_E$ , как на поверхности Земли? 0.5pt

Алиса поспорила со своим другом — космонавтом Бобом. Боб не верит в то, что они действительно живут на космической станции и утверждает, что они находятся на Земле. Алиса хочет с помощью физики доказать Бобу, что они живут на вращающейся космической станции. Для этого она прикрепила груз массы  $m$  к пружине с жёсткостью  $k$  и заставила её колебаться. Груз колеблется только в вертикальном направлении и не может перемещаться в горизонтальном направлении.

**B.2** Полагая, что ускорение свободного падения на Земле постоянно и равно  $g_E$ , чему будет равна циклическая частота колебаний  $\omega_E$ , измеренная человеком на Земле? 0.2pt

**B.3** Какую циклическую частоту  $\omega$  измерит Алиса на космической станции? 0.6pt

Алиса считает, что ее опыт доказывает, что они находятся на вращающейся космической станции. Боб по-прежнему сомневается. Он утверждает, что если принять во внимание изменение силы притяжения по мере поднятия над поверхностью Земли, получится то же самое.

В дальнейших заданиях мы изучим вопрос, прав ли Боб.

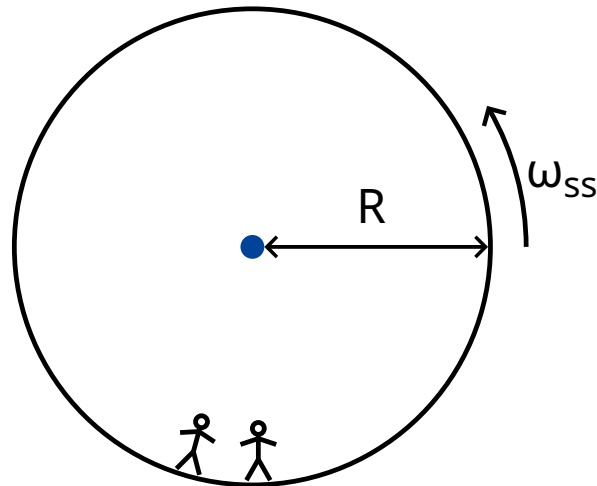


Рис. 4. Космическая станция

- B.4** Получите выражение для ускорения свободного падения  $g_E(h)$  для небольших высот  $h$  над поверхностью Земли и вычислите циклическую частоту колебаний  $\tilde{\omega}_E$  колеблющегося груза (достаточно использовать линейное приближение). Обозначьте радиус Земли за  $R_E$ . Вращением Земли можно пренебречь. 0.8pt

Разумеется, для данной космической станции Алиса обнаружила, что пружинный маятник колеблется с той частотой, которую предсказал Боб.

- B.5** Для какого радиуса космической станции  $R$  частота колебаний  $\omega$  совпадает с частотой колебаний  $\tilde{\omega}_E$  на поверхности Земли? Выразите свой ответ через  $R_E$ . 0.3pt

Раздраженная упрямством Боба, Алиса решила провести эксперимент, чтобы доказать свою точку зрения. Для этого она залезла на башню высотой  $H$  от пола и уронила груз. Этот эксперимент можно рассматривать во вращающейся системе координат, а также в инерциальной системе координат.

В равномерно вращающейся системе координат на космонавтов действует фиктивная сила  $\vec{F}_C$ , называемая силой Кориолиса. Сила  $\vec{F}_C$ , действующая на объект массой  $m$ , движущийся со скоростью  $\vec{v}$  в системе координат, вращающейся с постоянной циклической частотой  $\vec{\omega}_{ss}$  определяется выражением

$$\vec{F}_C = 2m\vec{v} \times \vec{\omega}_{ss}. \quad (2)$$

Вы можете использовать это выражение в скалярном виде:

$$F_C = 2mv\omega_{ss} \sin \phi, \quad (3)$$

где  $\phi$  — угол между скоростью и осью вращения. Сила перпендикулярна как скорости  $v$ , так и оси вращения. Знак силы определяется правилом правой руки, но в дальнейшем вы можете свободно выбрать его по своему усмотрению.

- B.6** Вычислите горизонтальную скорость  $v_x$  и горизонтальное смещение  $d_x$  (относительно пола башни в направлении, перпендикулярном башне) груза в момент времени, когда он ударится о пол. Можете считать, что высота  $H$  башни мала, так что ускорение, измеренное космонавтами постоянно во время падения. Также вы можете считать, что  $d_x \ll H$ . 1.1pt

Для получения хороших результатов Алиса решила провести этот опыт, используя гораздо более высокую башню, чем раньше. К её удивлению, масса упала на пол около основания башни, т.е.  $d_x = 0$ .

- B.7** Найдите минимальную высоту башни, для которой может произойти, что  $d_x = 0$ . 1.3pt

Алиса хочет предпринять последнюю попытку убедить Боба. Она хочет использовать свой пружинный маятник, чтобы показать влияние силы Кориолиса. Для этого она переделала установку: прикрепила пружину к кольцу, которое может свободно скользить по горизонтальному стержню вдоль оси  $x$  без трения. Сама пружина колеблется в направлении  $y$ . Стержень параллелен полу и перпендикулярен оси вращения космической станции. Плоскость  $xy$  таким образом перпендикулярна оси вращения, а ось  $y$  направлена к центру вращения станции.

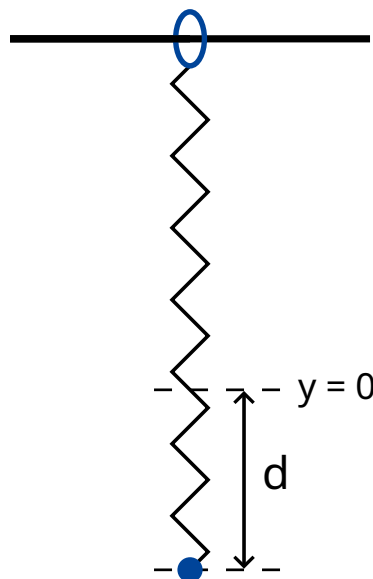


Рис. 5. Установка.

- B.8** Алиса потянула груз на расстояние  $d$  вниз от положения равновесия  $x = 0$ ,  $y = 0$ , а затем отпустила (рис. 5). 1.7pt
- Приведите алгебраические выражения для  $x(t)$  и  $y(t)$ . Величину  $\omega_{ss}d$  можно считать малой. Можно пренебречь силой Кориолиса для движения вдоль оси  $y$ .
  - Нарисуйте схематично траекторию  $(x(t), y(t))$ , отметив все характерные особенности, в частности, амплитуду.

Алиса и Боб продолжают спорить.