Dwa zagadnienia mechaniczne (10 points)

Przed rozpoczęciem rozwiązywania przeczytaj ogólne instrukcje znajdujące się w osobnej kopercie.

Część A. Ukryty metalowy dysk (3.5 points)

Rozważmy drewniany walec o promieniu r_1 i długości h_1. Gdzieś wewnątrz tego drewnianego walca drewno zostało zastąpione przez metalowy dysk o promieniu r_2 i grubości h_2. Oś tego dysku B jest równoległa do osi S drewnianego walca a dysk znajduje się w takiej samej odległości od obu podstaw cylindra. Odległość miedzy S oraz B oznaczamy przez d. Gęstość drewna wynosi ρ_1, gęstość metalu to $\rho_2 > \rho_1$. Całkowita masa drewnianego cylindra wraz z metalowym dyskiem w środku wynosi M.

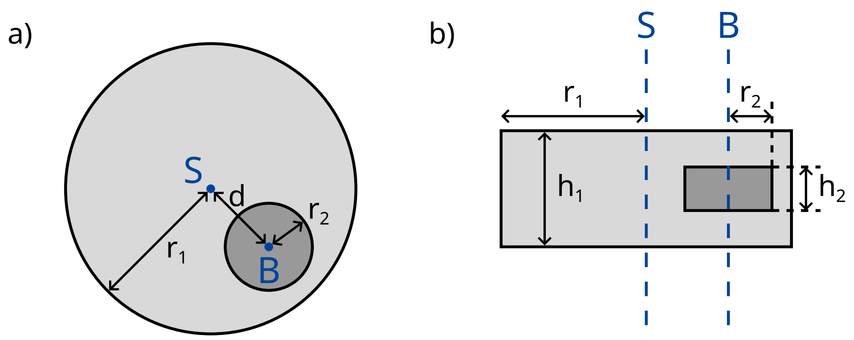
W tym punkcie zadania cylinder znajduje się na podłodze i może swobodnie toczyć się w lewo i w prawo. Rysunek 1 przedstawia widok układu wzdłuż osi cylindra oraz z góry.

Celem tego punktu zadania jest znalezienie wielkości i położenia metalowego dysku.

W następnych krokach, gdy będziesz proszony o podanie wyniku poprzez znane wielkości, zawsze możesz założyć, że następujące parametry są znane:

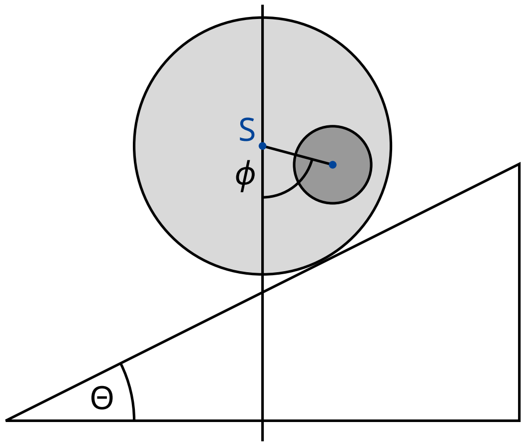
$$r_1,\ h_1,\ \rho_1,\ \rho_2, M\ . \tag{1}$$

Celem jest wyznaczenie r_2, h_2oraz d, poprzez niebezpośrednie pomiary.



Rysunek 1: a) widok wzdłuż osi b) widok z góry

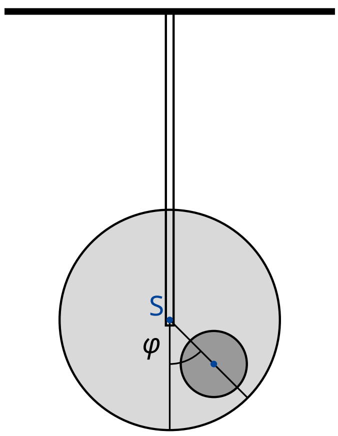
Oznaczamy przez b odległość między środkiem masy C całego układu (drewnianego walca z metalowym dyskiem w środku) a osią drewnianego walca S. Aby wyznaczyć tę odległość wykonujemy następujące doświadczenie: Kładziemy walec na poziomym podłożu tak, żeby znajdował się w stabilnym stanie równowagi. Następnie powoli pochylamy podłoże o kąt Θ (patrz rysunek 2). Dzięki tarciu statycznemu walec może się swobodnie toczyć bez poślizgu. Walec stoczy się trochę w dół pochyłości, ale po pewnym czasie będzie spoczywał w stanie równowagi trwałej, obrócony o kąt ϕ , który mierzymy.



Rysunek 2: Walec na pochyłym podłożu.

A.1	Znajdź wyrażenie na b jako funkcję parametrów (1), kąta ϕ i kąta nachylenia Θ podłoża.	0.8pt

Od tej pory przyjmujemy, że wartość b jest znana.



Rysunek 3: Zawieszony walec.

Następnie chcemy zmierzyć moment bezwładności I_S układu (drewnianego walca wraz z metalowym dyskiem) względem osi S. W tym celu zawieszamy drewniany walec za jego oś na sztywnych, nieruchomych prętach. Następnie obracamy go o mały kąt φ i puszczamy. Ta sytuacja jest przedstawiona na rysunku 3. Obserwujemy, że kąt φ zmienia się periodycznie z okresem T.

A.2	Znajdź równanie ruchu dla φ. Wyraź moment bezwładności I_S układu względem jego osi S poprzez T, b oraz znane parametry (1). Możesz założyć, że układ odchyliliśmy niewiele od położenia równowagi, tak że φ jest zawsze małe.	0.5pt

Z pomiarów w punktach **A.1** oraz **A.2**, chcemy teraz wyznaczyć geometrię i pozycję metalowego dysku wewnątrz drewnianego walca.

A.3	Znajdź wyrażenie na odległość d w zależności od b oraz parametrów (1). Możesz również użyć w tym wyrażeniu zmiennych r_2 oraz h_2, gdyż zostaną one wyznaczone w punkcie **A.5**.	0.4pt

A.4	Wyznacz moment bezwładności I_S poprzez b oraz znane parametry (1). Możesz również użyć w tym wyrażeniu zmiennych r_2 oraz h_2 gdyż zostaną one wyznaczone w punkcie **A.5**.	0.7pt

A.5	Korzystając z powyższych wyników, napisz wyrażenie na w_2 oraz h_2 w zależności od b, T oraz znanych parametrów (1). Możesz wyrazić h_2 jako funkcję r_2.	1.1pt

Część B. Obracająca się stacja kosmiczna (6.5 points)

Alice jest astronautką mieszkającą na stacji kosmicznej. Ta stacja jest ogromnym kołem o promieniu R obracającym się wokół swojej osi, dzięki czemu astronauci żyją w sztucznej grawitacji. Astronauci mieszkają na wewnętrznej stronie obręczy koła. Przyciąganie grawitacyjne stacji oraz krzywiznę jej podłogi (wewnętrzna strona obręczy koła) można zaniedbać.

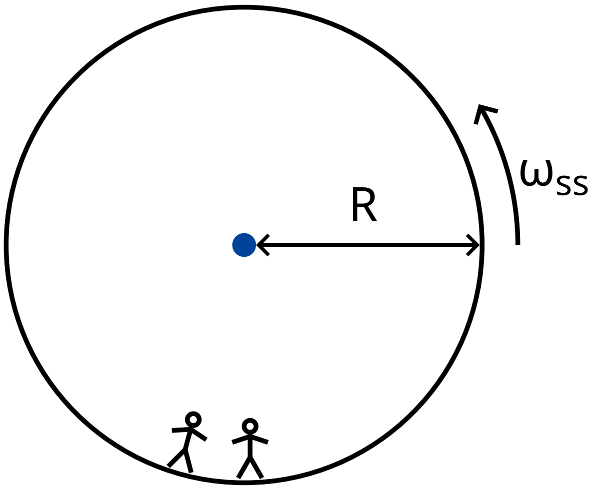
B.1	Z jaką prędkością kątową ω_{ss} obraca się ta stacja kosmiczna jeśli astronauci doświadczają tego samego przyspieszenia grawitacyjnego g_E co na powierzchni Ziemi?	0.5pt

Alice i jej przyjaciel astronauta Bob spierają się. Bob nie wierzy, że w rzeczywistości mieszkają na stacji kosmicznej i twierdzi, że znajdują się na Ziemi. Alice chce dowieść Bobowi, że mieszkają na obracającej się stacji kosmicznej wykorzystując fizykę. Aby to zrobić, przymocowuje masę m do sprężyny o stałej sprężystości k, po czym pozwala tej masie drgać. Masa drga tylko w kierunku pionowym i nie może poruszać się w poziomie.

B.2	Zakładając, że przyspieszenie grawitacyjne na Ziemi jest stałe i wynosi g_E, jaka będzie prędkość kątowa drgań (częstość) ω_E jaką zmierzonoby na Ziemi?	0.2pt

B.3	Jaka będzie prędkość kątowa drgań (częstość) ω jaką Alice zmierzy na stacji kosmicznej?	0.6pt

Alice jest przekonana, że jej doświadczenie dowiodło, że znajdują się na stacji kosmicznej. Bob pozostaje sceptyczny. Twierdzi, że jeśli weźmie się pod uwagę zmianę przyspieszenia grawitacyjnego powyżej powierzchni Ziemi, zaobserwuje się podobny efekt. Poniżej zbadamy, czy Bob ma rację.



Rysunek 4: Stacja kosmiczna

B.4	Wyprowadź wyrażenie na przyspieszenie grawitacyjne $g_E(h)$ dla małych wysokości h powyżej powierzchni Ziemi i wyznacz prędkość kątową (częstość) $\tilde{\omega}_E$ drgań masy uwzględniając to wyrażenie (przybliżenie liniowe jest wystarczające). Promień Ziemi wynosi R_E. Zaniedbaj obrót Ziemi.	0.8pt

Rzeczywiście, Alice ustaliła, że na jej stacji kosmicznej masa drga na sprężynie z częstością, którą przewidział Bob.

B.5	Dla jakiego promienia R stacji kosmicznej częstość drgań ω jest równa częstości drgań $\tilde{\omega}_E$ na powierzchni Ziemi? Wyraź ten wynik przez R_E.	0.3pt

Zirytowana uporem Boba Alicja wymyśla doświadczenie mające udowodnić jej rację. W tym celu wspina się na wieżę o wysokości H powyżej podłogi stacji kosmicznej i upuszcza masę. To doświadczenie może być rozważane zarówno w obracającym się układzie odniesienia jak i w układzie inercjalnym.

W obracającym się układzie odniesienia na obiekty działa pozorna siła $\vec{F}_C$ nazywana siłą Coriolisa. Siła $\vec{F}_C$ działająca na obiekt o masie m poruszający się z prędkością $\vec{v}$ w układzie obracającym się ze stałą prędkością kątową $\vec{\omega}_{ss}$ jest dane przez

$$\vec{F}_C = 2m\vec{v} \times \vec{\omega}_{ss} \ . \tag{2}$$

Używając wielkości skalarnych możesz wykorzystać wzór

$$F_C = 2mv\omega_{ss} \sin\phi \ , \tag{3}$$

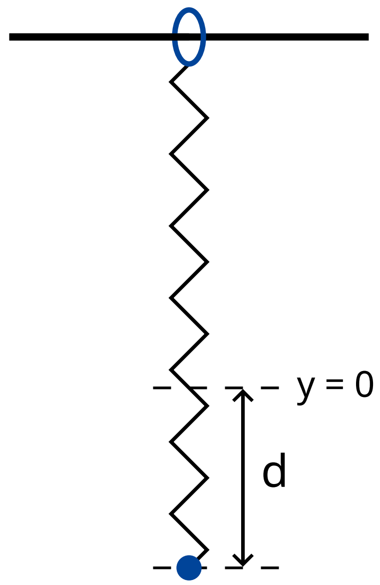
gdzie ϕ jest katem między prędkością i osią obrotu. Ta siła jest prostopadła do prędkości v oraz do osi obrotu. Znak siły może być określony za pomocą reguły prawej dłoni, ale w dalszej części możesz wybrać go dowolnie.

B.6	Wyznacz poziomą prędkość v_x oraz poziome odchylenie d_x (względem podstawy wieży i w kierunku prostopadłym do wieży) w chwili uderzenia masy w podłogę. Możesz przyjąć, że wysokość H wieży jest mała, a zatem przyspieszenie masy mierzone przez astronautów jest stałe. Możesz również założyć, że $d_x \ll H$.	1.1pt

Aby dostać dobry wynik, Alice zdecydowała się przeprowadzić swój eksperyment z wieży znacznie wyższej niż poprzednio. Ku jej zdziwieniu, masa uderzyła w podłogę przy podstawie wieży, tak więc $d = 0$.

B.7	Znajdź dolne ograniczenie wysokości wieży, dla której może zajść przypadek $d_x = 0$.	1.3pt

Alice robi ostatnią próbę przekonania Boba. Zamierza użyć masy na sprężynce aby pokazać efekt działania siły Coriolisa. W tym celu modyfikuje poprzednio wykorzystywany układ. Przymocowuje sprężynę do kółeczka, które może przesuwać się swobodnie na poziomym pręcie w kierunku x bez żadnego tarcia. Sprężyna drga w kierunku y. Pręt jest równoległy do podłogi i prostopadły do osi obrotu stacji. Zatem płaszczyzna xy jest prostopadła do osi obrotu, z osią y skierowaną do środka obrotu stacji.



Rysunek 4. Rozpatrywany układ

B.8	Alice pociąga za masę na odległość d w dół od położenia równowagi $x = 0$, $y = 0$ a następnie puszcza ją pozwalając na swobodny ruch (patrz rysunek 5). • Podaj wyrażenie algebraiczne na $x(t)$ oraz $y(t)$. Możesz przyjąć, że $\omega_{ss} d$ jest stałe i zaniedbaj siłę Coriolisa dla ruchu wzdłuż osi y. • Naszkicuj tor $(x(t), y(t))$, zaznaczając wszystkie istotne elementy, takie jak amplituda.	1.7pt

Alice i Bob kontynuują swój spór.