Dois Problemas de Mecânica

Antes de iniciar este problema, leia cuidadosamente as Instruções Gerais que pode encontrar noutro envelope.

Parte A. O Disco Escondido (3,5 pontos)

Considere um cilindro sólido de madeira com raio r_1 e espessura h_1. Algures dentro deste cilindro a madeira foi substituída por um disco metálico de raio r_2 e de espessura h_2. O disco metálico está colocado de tal forma que o seu eixo de simetria B é paralelo ao eixo de simetria S do cilindro de madeira. O disco metálico está posicionado a igual distância das duas superfícies do cilindro de madeira. A distância entre os eixos S e B é d. A densidade da madeira é ρ_1 e a densidade do metal é $\rho_2 > \rho_1$. A massa total do sistema é M.

Nesta tarefa colocamos o cilindro de madeira num plano de tal forma que este possa oscilar livremente para a direita e para a esquerda. Na Fig. 1 representamos uma vista de lado e uma vista de cima do objeto.

O objetivo desta tarefa é determinar o o tamanho e a posição do disco metálico.

No que se segue, quando for pedido para exprimir o resultado em função de quantidades conhecidas, pode sempre assumir que os seguintes parâmetros são conhecidos:

$$r_1,\ h_1,\ \rho_1,\ \rho_2, M\ . \tag{1}$$

O objetivo é determinar r_2, h_2 e d através de medidas indiretas.

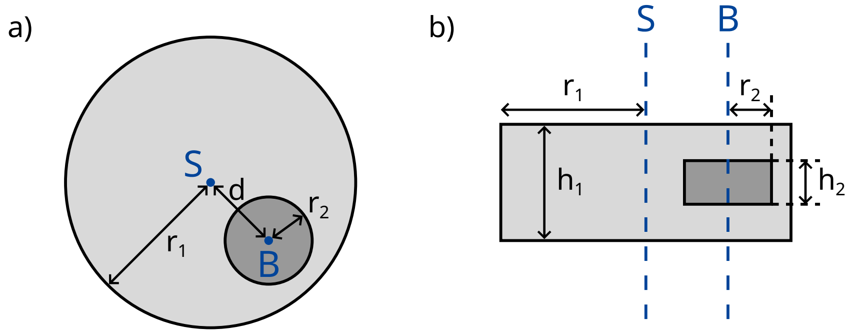

Figura 1: a) vista lateral b) vista de cima.

A distância entre o centro de massa C do sistema e o eixo de simetria S do cilindro de madeira é b. Para obter esta distância colocamos o cilindro numa base horizontal de tal forma que se encontre num equilíbrio estável. Posteriormente, inclinamos a base lentamente até esta atingir um ângulo Θ (ver Fig. 2). Devido ao atrito estático, o cilindro de madeira pode rodar sem deslizar. Irá rodar um pouquinho no plano inclinado até parar no novo estado de equilíbrio, após ter rodado um ângulo mensurável ϕ em torno do eixo de simetria.

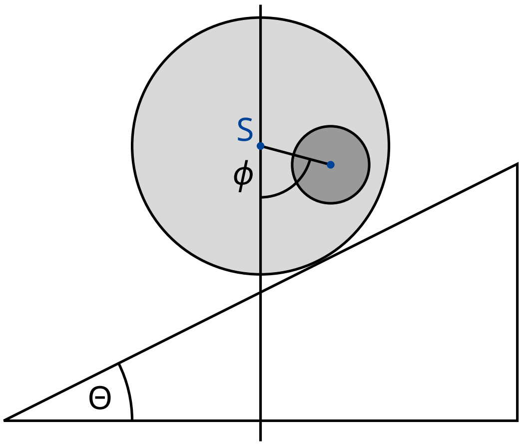

Figura 2: Cilindro na base inclinada.

A.1	Determine a expressão para b em função das quantidades da equação (1), do ângulo ϕ e da inclinação da base Θ.	0.8pt

A partir de agora assuma que o valor de b é conhecido.

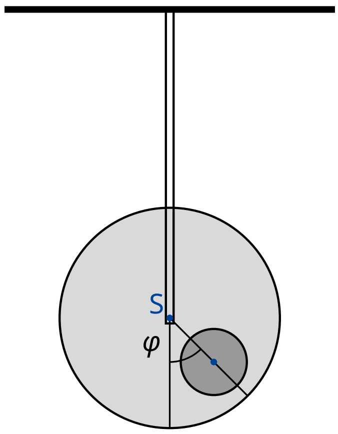

Figura 3: Cilindro suspenso.

Seguidamente iremos medir o momento de inércia I_S do sistema em relação ao eixo de simetria S. Com este objetivo iremos suspender numa barra rígida o cilindro de madeira pelo seu eixo de simetria. Rodamos o cilindro um ângulo φ da sua posição de equilíbrio e deixamo-lo oscilar. Veja a figura 3. Observamos que o ângulo φ segue um movimento periódico com período T.

A.2	Escreva a equação de movimento obedecida por φ. Escreva o momento de inércia I_S do sistema em relação ao eixo de simetria S em função de T, b e das quantidades conhecidas (1). Pode assumir que o ângulo de oscilação φ é sempre pequeno.	0.5pt

A partir das medidas realizadas nas perguntas **A.1** e **A.2**, queremos agora determinar a geometria e a posição do disco metálico dentro do cilindro de madeira.

A.3	Encontre a expressão para a distância d em função de b e das quantidades da equação (1). Pode incluir na sua expressão as variáveis r_2 e h_2 pois elas serão calculadas na resposta à pergunta **A.5**.	0.4pt

A.4	Escreva a expressão para o momento de inércia I_S em função de b e das quantidades da equação (1). Pode incluir na sua expressão as variáveis r_2 e h_2 pois elas serão calculadas na resposta à pergunta **A.5**.	0.7pt

A.5	Use todos os resultados acima para escrever h_2 e r_2 em função de b, T e das quantidades da equação (1). Pode exprimir h_2 em função de r_2.	1.1pt

Parte B. Estação Espacial a Rodar (6,5 pontos)

A Alice é uma astronauta que vive numa estação espacial. Esta estação espacial é uma roda gigante de raio R que roda em torno do seu eixo de simetria. Deste modo, os astronautas que vivem no lado de dentro da borda da estação espacial, sentem uma força que se assemelha à força gravítica. A estação espacial é tão leve que a força gravítica que exerce sobre os astronautas é desprezável. Do mesmo modo não considere a curvatura do chão onde estão os astronautas.

B.1	Qual é o valor da frequência angular ω_{ss} da estação espacial de modo a que os astronautas sintam a mesma aceleração gravítica g_E que à superfície terrestre?	0.5pt

A Alice e o seu amigo astronauta Bernardo têm um desacordo. O Bernardo não acredita que estão a viver na estação espacial e pensa que na realidade estão na Terra. A Alice quer utilizar a Física para provar ao Bernardo que estão na realidade a rodar na estação espacial. Com este objetivo, ela Para isso ela põe um objeto de massa m a oscilar numa mola de constante k . A massa oscila somente na vertical e não pode mover-se na direção horizontal.

B.2	Assumido que a aceleração da gravidade na Terra é uma constante, qual seria a frequência angular da oscilação ω_E que se mediria se o sistema estivesse na Terra?	0.2pt

B.3	Qual é a frequência angular ω do movimento da massa que a Alice mede na estação espacial?	0.6pt

A Alice está convencida que a sua experiência mostra ao Bernardo que eles se encontram numa estação espacial. O Bernardo ainda não está convencido. Ele diz que se tomar em conta a variação da gravidade com a altura na superfície da Terra também se obtém um efeito semelhante. Nas tarefas seguintes iremos investigar se o Bernardo está correto.

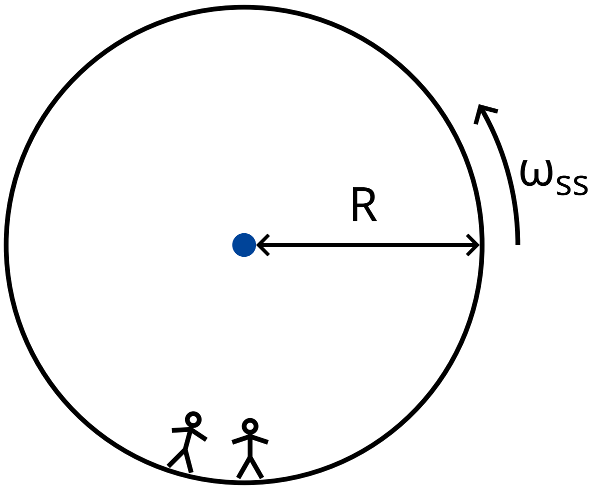

Figura 4: Estação espacial.

B.4	Derive uma expressão $g_E(h)$ para a aceleração da gravidade à superfície da Terra em função da altura, quando h é pequeno. Calcule a frequência de oscilação $\tilde{\omega}_E$ que seria observada (a aproximação linear é suficiente). Indique o raio da Terra por R_E. Despreze o efeito da rotação da Terra.	0.8pt

De facto, nesta estação espacial, a Alice descobre que a mola oscila com a frequência prevista pelo Bernardo.

B.5	Qual deverá ser o raio R da estação espacial para que a frequência angular da oscilação ω medida seja idêntica à frequência de oscilação $\tilde{\omega}_E$ que seria medida na superfície da Terra? Exprima a sua resposta em função de R_E.	0.3pt

Farta da teimosia do Bernardo, a Alice tenta realizar outra experiência para mostrar que ele está errado. Ela sobe ao topo de uma torre de altura H na estação espacial e deixa cair uma massa. Esta experiência tanto pode ser analisada a partir do referencial não inercial que roda com os astronautas, como a partir de um referencial inercial.

No referencial que roda com um movimento circular uniforme, os astronautas sentem uma força inercial que se denomina por força de Coriolis, $\vec{F}_C$. A força $\vec{F}_C$ é aplicada num objeto com massa m que se move com velocidade $\vec{v}$ num referencial que roda com velocidade angular constante $\vec{\omega}_{ss}$ e é dada por

$$\vec{F}_C = 2m\vec{v} \times \vec{\omega}_{ss} \; . \tag{2}$$

Ou seja, o módulo da força de Coriolis é

$$F_C = 2mv\omega_{ss} \sin\phi \; , \tag{3}$$

onde ϕ é o ângulo entre a velocidade da massa e o eixo de rotação. A força é perpendicular tanto à velocidade v como ao eixo de rotação. O sinal da força pode ser determinado pela regra da mão direita.

B.6	Calcule a velocidade horizontal v_x e o deslocamento horizontal d_x (relativo à base da torre, na direção perpendicular à torre) da massa no momento em que esta embate no solo. Pode assumir que a altura H da torre é pequena, de tal modo que a aceleração medida pelos astronautas é constante durante a queda. Também pode assumir que $d_x \ll H$.	1.1pt

Para obter um bom resultado, a Alice decide realizar a sua experiência a partir de uma torre muito mais alta. Para sua surpresa ela nota que a massa atinge o solo imediatamente abaixo do sítio de onde a largou, de tal forma que $d_x = 0$.

B.7	Encontre um limite mínimo para a altura da torre de forma a que seja possível que $d_x = 0$.	1.3pt

A Alice está disposta a tentar por uma última vez a convencer o Bernardo. Ela volta a utilizar a mola desta vez para demonstrar o efeito da força de Coriolis. Deste modo, ela utiliza uma nova montagem: prende a mola num anel que pode deslizar livremente e sem fricção sobre uma barra colocada na direção x. A mola continua a oscilar somente na direção y. A barra é paralela ao solo e perpendicular ao eixo de rotação da estação espacial. O plano xy é assim perpendicular ao eixo de rotação, com a direção y a apontar para o centro de rotação da estação espacial.

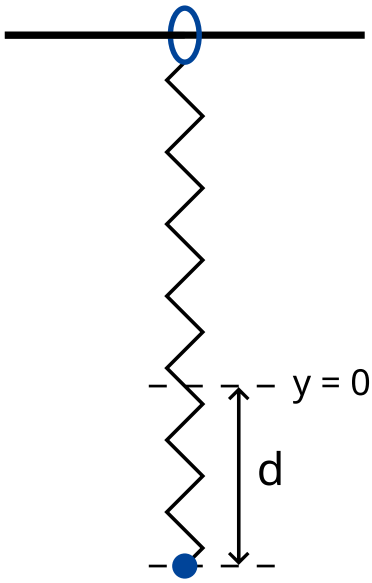

Figura 5: Montagem utilizada.

B.8	A Alice desloca a massa uma distância d para baixo do ponto de equilíbrio $x = 0$, $y = 0$, e larga a mola (ver figura 5). • Derive uma expressão para $x(t)$ e para $y(t)$. Pode assumir que $\omega_{ss} d$ é pequeno e pode desprezar a componente segundo y da força de Coriolis. • Faça o esboço de uma trajetória $(x(t), y(t))$, indicando todas as características importantes da trajetória como por exemplo a amplitude.	1.7pt

A Alice e o Bernardo continuaram a discutir.