

مسألتين في الميكانيكا (10 درجات)

من فضلك اقرأ التعليمات العامة في المظروف المنفصل قبل حل المسألة

الجزء A. القرص المخفي (3.5 درجة)

لديك أسطوانة خشبية صلبة مصمتة نصف قطرها r_1 وسمكها h_1 . في مكان ما بداخل الأسطوانة الخشبية تم حفر جزء من الخشب ووضع فيه قرص معدني نصف قطره r_2 وسمكه h_2 . القرص المعدني موضوع بطريقة معينة بحيث يكون محوره التناظري (التماثلي) B موازياً للمحور التناظري (التماثلي) للأسطوانة الخشبية S ، والقرص المعدني موضوع على مسافات متساوية من كل من وجهي قمة وقاع الأسطوانة الخشبية. علماً أن المسافة بين B و S هي d ، وكثافة الخشب هي ρ_1 ، وكثافة المعدن ρ_2 حيث أن $\rho_2 > \rho_1$. الكتلة الكلية للأسطوانة الخشبية مع القرص المعدني الموجود بالداخل هي M .

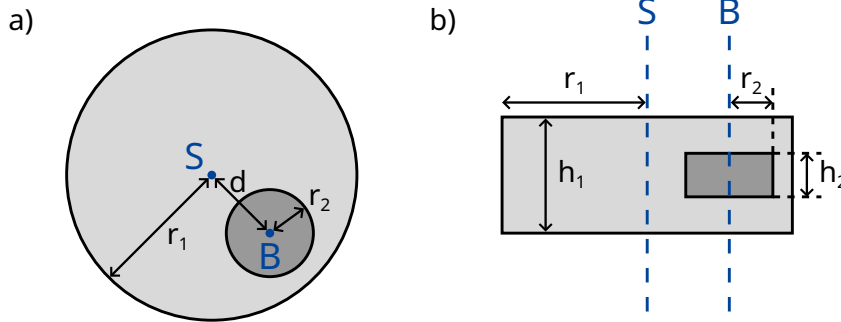
في هذا السؤال، نضع الأسطوانة الخشبية على الأرض بحيث تتدحرج (تلف) بحرية يميناً ويساراً. انظر الشكل رقم 1 موضحاً المنظر الجانبي والمنظر العلوي.

المطلوب في هذا السؤال هو إيجاد حجم وموقع القرص المعدني.

فيما يلي، عندما يكون المطلوب هو التعبير عن الناتج بكميات معروفة، افترض المعطيات التالية معروفة.

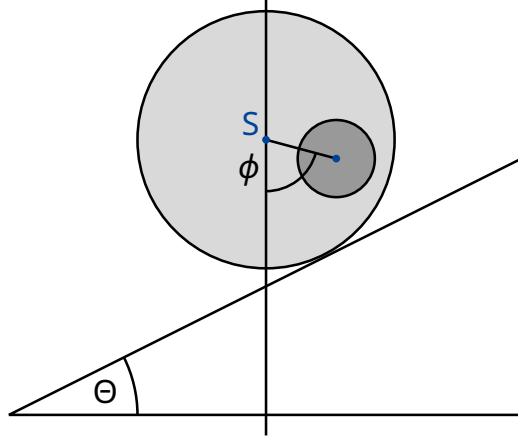
$$r_1, h_1, \rho_1, \rho_2, M. \quad (1)$$

المطلوب هو إيجاد d, r_2, h_2 من خلال قياساتك غير المباشرة.



الشكل رقم 1: a) منظر جانبي b) منظر علوي

الرمز b ، يُعبر عن المسافة بين مركز الكتلة C للنظام بالكامل ومحور التناظر S للأسطوانة الخشبية، لتعيين هذه المسافة، فإننا نصمم التجربة التالية: نضع الأسطوانة الخشبية على قاعدة أفقية بحيث تكون في وضع إيزان مستقر. ثم نقوم بإمالة القاعدة بزاوية θ (انظر الشكل 2) وبسبب الاحتكاك السكوني فإن الأسطوانة الخشبية تتدحرج بحرية دون أن تنزلق. حيث تتدحرج الأسطوانة على السطح المائل بمقدار بسيط ثم تعود مرة أخرى إلى السكون في وضع الاتزان وذلك بعد أن تدور بزاوية ϕ والتي يتم قياسها.

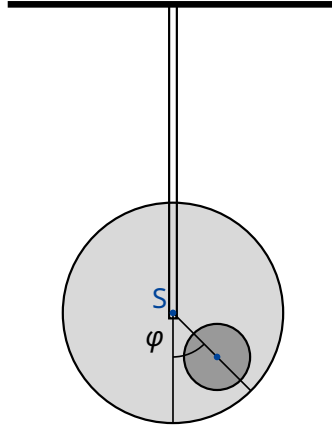


الشكل 2: الأسطوانة على القاعدة المائلة

0.8pt

A.1 أوجد تعبيراً ل b كدالة في الكميات (1): الزاوية ϕ ، وزاوية ميل القاعدة θ .

من الآن فصاعداً، نفترض أن قيمة b معروفة.



الشكل 3: النظام المعلق

فيما يلي نريد قياس عزم القصور للنظام I_S بالنسبة لمحور التناظر S . لهذا الغرض، نقوم بتعليق الأسطوانة الخشبية من عند محور تناظرها بساق صلبة. ثم نقوم بإبعادها من موضع الاتزان بزواوية صغيرة φ ثم نتركها. أنظر الشكل رقم 3 لإعدادات التجربة. وجدنا أن الزاوية φ تصف حركة دورية مع الزمن الدوري T .

0.5pt

A.2 أوجد معادلة الحركة التي تصف الزاوية φ ؟ عبر عن عزم القصور للنظام I_S حول محور التناظر S بدلالة b و T والكميات المعروفة رقم (1). أفتراض أنه تم إبعاد الأسطوانة عن موضع الاتزان بمقدار بسيط جداً، أي ان قيمة الزاوية φ صغيراً جداً

من القياسات في الأسئلة رقم A.1 و A.2، نريد إيجاد الشكل الهندسي وموضع القرص المعدني في الأسطوانة الخشبية.

A.3 أوجد تعبيراً رياضياً للمسافة d كدالة في b والكميات المعروفة (1). يمكن أن تُصن r_2 و h_2 كمتغيرات في تعبيرك الرياضي، حيث سيتم حسابهم في السؤال الفرعي A.5. **0.4pt**

A.4 أوجد تعبيراً رياضياً لعزم القصور I_S بدلالة b والكميات المعروفة (1). يمكن أن تُصن r_2 و h_2 كمتغيرات في تعبيرك الرياضي، حيث سيتم حسابهم في السؤال الفرعي A.5. **0.7pt**

A.5 مستخدماً كل النتائج السابقة، أكتب تعبيراً رياضياً لكل من r_2 و h_2 بدلالة T و b والكميات المعروفة (1). وأيضاً عبر عن h_2 كدالة في r_2 . **1.1pt**

الجزء B: محطة الفضاء الدوارة (6.5 درجات)

أليس رائدة فضاء تعيش في محطة فضاء. محطة الفضاء عبارة عن إطار دائري (عجلة دائرية) عملاق نصف قطره R ويدور حول محوره. وبالتالي يوفر جاذبية اصطناعية لرواد الفضاء. يعيش رواد الفضاء على الجانب الداخلي لحافة الإطار (العجلة). يمكن إهمال التجاذب الناشئ بين محطة الفضاء وانحناء السقف.

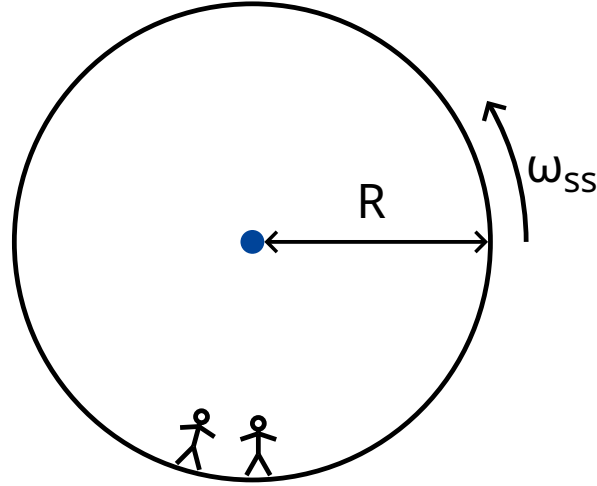
B.1 كم مقدار التردد الزاوي (السرعة الزاوية) ω_{ss} الذي تدور به محطة الفضاء لكي تجعل رواد الفضاء يتأثروا بجاذبية مساوية للجاذبية g_E على سطح الأرض؟ **0.5pt**

يوجد خلاف بين كل من أليس وصديقتها رائد الفضاء بوب. حيث لا يؤمن بوب أنه بالفعل يعيش في محطة فضاء ويدعي أنه يعيش على سطح الأرض. أليس تريد أن تثبت لبوب أنهم يعيشون داخل محطة فضاء بفضل الفيزياء. لهذا الغرض، قامت بتعليق كتلة مقدارها m في نابض (زنبرك) له ثابت k وتركته يتذبذب (يهتز). تهتز الكتلة رأسياً فقط ولا يمكنها ان تهتز في الاتجاه الأفقي.

B.2 بفرض أنه على الأرض يكون تسارع الجاذبية الأرضية g_E ثابت، ما هو التردد الزاوي للاهتزاز (السرعة الزاوية) ω_E الذي يتم قياسه على الأرض؟ **0.2pt**

B.3 ما هو التردد الزاوي للاهتزاز (السرعة الزاوية) ω التي تقوم أليس بقياسه على محطة الفضاء؟ **0.6pt**

أليس مقتنعة أن تجربتها تثبت أنهم في محطة فضاء دوارة. بينما بوب مازال متشككاً ويدعي أنه عند الأخذ في الاعتبار تغيرات الجاذبية الأرضية فوق سطح الأرض، يمكن الحصول على تأثيرات مماثلة. في السؤال التالي سوف يتم التحقق ما إذا كان بوب محقاً؟



الشكل رقم 4: محطة الفضاء

0.8pt **B.4** أوجد تعبيراً رياضياً للجاذبية $g_E(h)$ عند ارتفاع صغير h عن سطح الأرض واحسب التردد الزاوي للاهتزاز $\tilde{\omega}_E$ للكتلة المهتزة (التقريب الخطي كافياً) على اعتبار أن نصف قطر الأرض هو R_E ، وإهمال دوران الأرض.

في الواقع، بالنسبة لمحطة الفضاء، أليس وجدت بالفعل أن البندول النابضي (نظام الكتلة النابض) يهتز بنفس التردد الذي تنبأ به بوب.

0.3pt **B.5** عند أي نصف قطر R لمحطة الفضاء يكون التردد الزاوي (السرعة الزاوية) ω تتوافق مع التردد الزاوي (السرعة الزاوية) $\tilde{\omega}_E$ للاهتزاز على سطح الأرض؟ عبر عن إجابتك بدلالة R_E

استاءت أليس من عناد بوب، وأرادت استخدام تجربة لاثبات وجهة نظرها. لهذا الغرض صعدت على برج له ارتفاع H فوق سطح محطة الفضاء وأسقطت كتلة. يتم التعامل في هذه التجربة للإطار المرجعي الدوراني تماماً مثل الإطار المرجعي القصوروي.

في الإطار المرجعي الدوراني المنتظم. يلاحظ رواد الفضاء وجود قوة وهمية تسمى قوة كوريوليس \vec{F}_C . القوة \vec{F}_C المؤثرة على كتلة قدرها m تتحرك بسرعة \vec{v} في إطار دوراني بتردد زاوي $\vec{\omega}_{ss}$ تُعطى بالعلاقة

$$\vec{F}_C = 2m\vec{v} \times \vec{\omega}_{ss} . \quad (2)$$

فيما يتعلق بالكميات القياسية يمكن استخدام

$$F_C = 2m\omega_{ss} \sin \phi , \quad (3)$$

حيث أن ϕ هي الزاوية بين السرعة ومحور الدوران. القوة عمودية على كل من السرعة v ومحور الدوران. إشارة القوة يمكن تحديدها باستخدام قاعدة اليد اليمنى، ولكن فيما يلي يمكن اختيارها بحرية.

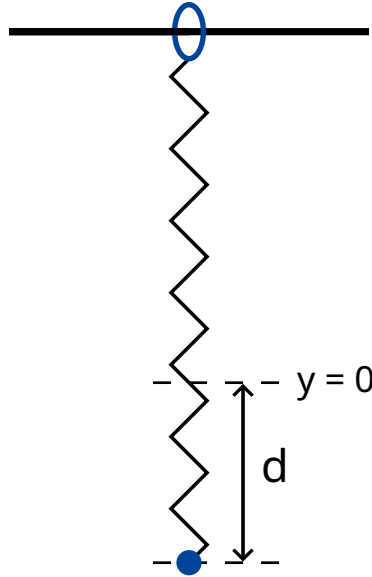
1.1pt **B.6** احسب السرعة الأفقية v_x والإزاحة الأفقية d_x (بالنسبة لقاعدة البرج، وفي اتجاه عمودي على قاعدة البرج) للكتلة في اللحظة التي تصطم فيها الكتلة بالسطح. افترض أن ارتفاع البرج H صغيراً جداً، لذلك التسارع الذي يقيسه رواد الفضاء يكون مقدار ثابتاً خلال السقوط. وأيضاً افترض أن $d_x \ll H$.

للحصول على نتائج جيدة، قررت أليس إجراء التجربة من على برج أعلى من المرة السابقة. وكانت المفاجأة، الكتلة اصطدمت بالسطح عند قاعدة البرج، لذلك كانت $d = 0$.

1.3pt

B.7 احسب الحد الأدنى لارتفاع البرج الذي يكون عنده $d_x = 0$

أرادت أليس القيام بمحاولة مرة أخيرة لاقناع بوب. أرادت استخدام النابض المهتز لتوضيح تأثير قوة كوريوليس. لهذا الغرض قامت بتغيير إعدادات التجربة الأصلية: قامت بإيصال النابض بحلقة يمكنها أن تنزلق بحرية على قضيب (ساق) أفقي في اتجاه x بدون احتكاك. يهتز النابض في اتجاه y . يُوضع القضيب موازياً للسطح وعمودياً على محور دوران محطة الفضاء. لذا فإن المستوى xy عمودياً على محور الدوران. حيث يشير الاتجاه y مباشرة إلى مركز دوران المحطة.



الشكل رقم 5: الإعدادات

B.8 قامت أليس بسحب الكتلة إلى أسفل مسافة قدرها d من موضع الاتزان $x = 0$ و $y = 0$ ثم تركتها. (انظر 1.7pt

الشكل رقم 5)

- أعطي تعبيراً جبرياً ل $x(t)$ و $y(t)$ بفرض أن $\omega_{ss}d$ صغيراً، مع إهمال قوة كوريوليس على امتداد محور y
- ارسم مخطط للمسار $(x(t), y(t))$ موضحاً علامات على كل الخصائص الهامة مثل السعة.

وتستمر المجادلة بين بوب وأليس.