Două probleme de mecanică (10 puncte)

Te rugăm ca, înainte să începi rezolvarea problemei, să citești Instrucțiunile generale aflate într-un plic separat.

Partea A. Discul ascuns (3,5 puncte)

Vei considera un cilindru masiv din lemn; raza cilindrului este r_1 iar înălțimea sa este h_1. Undeva în interiorul cilindrului de lemn se află un disc metalic având raza r_2 și înălțimea h_2. Discul de metal este astfel plasat încât axa sa de simetrie B este paralelă cu axa de simetrie S a cilindrului de lemn . Discul metalic este plasat la distanțe egale de fața de sus și de fața de jos a cilindrului de lemn. Vei nota distanța dintre S și B cu d. Densitatea lemnului este ρ_1, iar densitatea metalului este $\rho_2 > \rho_1$. Masa totală a cilindrului de lemn, având discul de metal în interiorul său este M.

În această parte a problemei vei presupune că cilindrul de lemn este plasat pe o suprafață plană pe care acesta se poate rostogoli liber la stânga sau la dreapta. Vezi Fig. 1 pentru o vedere laterală și pentru o vedere de deasupra a ansamblului studiat.

Scopul acestei sarcini de lucru este determinarea dimensiunilor și a poziției discului metalic.

În cele ce urmează, ori de câte ori ți se cere să exprimi un rezultat în funcție de mărimile cunoscute, vei presupune că următoarele mărimi îți sunt date:

$$r_1,\ h_1,\ \rho_1,\ \rho_2, M\ . \tag{1}$$

Scopul sarcinii de lucru este determinarea mărimilor r_2, h_2 și d, prin măsurări indirecte .

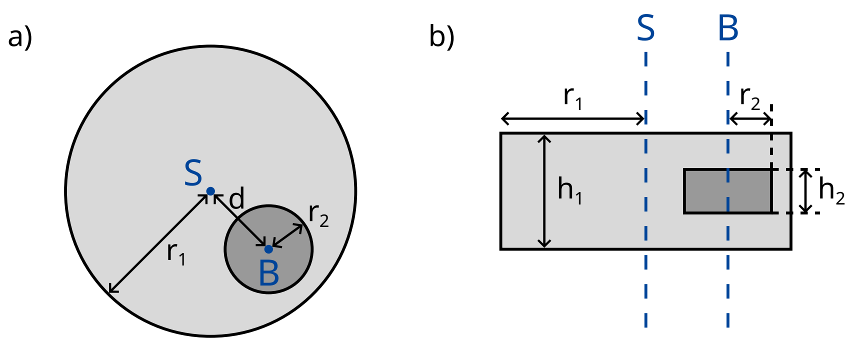

Figura 1: a) vedere laterală b) vedere de sus

Se notează cu b distanța dintre centrul de masă C a întregului sistem și axa de simetrie S a cilindrului de lemn. Pentru a determina această distanță, se proiectează următorul experiment: se plasează cilindrul de lemn pe o suprafață orizontală - astfel încât acesta să se afle într-o stare de echilibru stabil. Se înclină apoi lent suprafața plană de sprijin, astfel încât aceasta să facă unghiul Θ cu orizontala (vezi Fig. 2). Datorită frecării statice, cilindrul de lemn se va rostogoli liber - fără să alunece. Rotindu-se, discul se deplasează puțin, dar va rămâne în echilibru stabil după ce s-a rotit cu unghiul ϕ care poate fi măsurat.

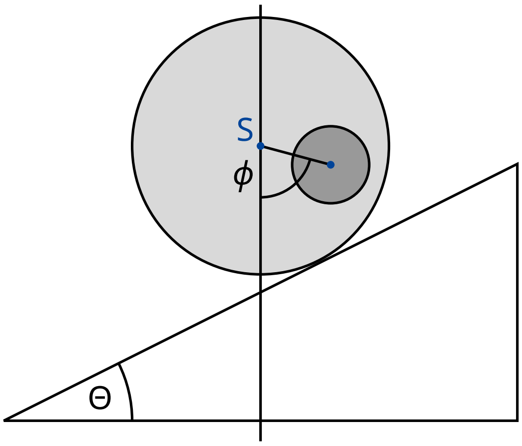

Figura 2: Cilindrul pe planul înclinat.

A.1	Determină expresia lui b ca funcție de cantitățile (1), unghiul ϕ și unghiul Θ de înclinare a planului pe care se află cilindrul.	0.8pt

De aici înainte vei presupune cunoscută valoarea mărimii b .

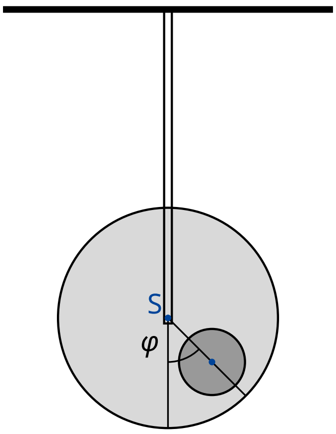

Figura 3: Sistemul suspendat.

În cele ce urmează, se intenționează măsurarea momentului de inerție I_S al sistemului, față de axa de simetrie S. În acest scop se suspendă cilindrul de lemn de axa sa de simetrie ca de o tijă rigidă . Se rotește apoi cilindrul față de poziția de echilibru cu un unghi mic φ și apoi este eliberat. Vezi figura 3 pentru descrierea situației. Se determină că φ descrie o mișcare periodică cu perioada T.

A.2	Dedu ecuația de mișcare pentru φ. Exprimă momentul de inerție I_S al sistemului față de axa sa de simetrie S ca funcție de T, b și de cantitățile cunoscute (1). Poți presupune că perturbarea poziției inițiale de echilibru este foarte mică, astfel că unghiul φ este întotdeauna foarte mic.	0.5pt

Folosind măsurările făcute la sarcinile de lucru **A.1** și **A.2** se cere determinarea datelor geometrice ale discului de metal și a poziției acestui disc de metal aflat în interiorul cilindrului de lemn.

A.3	Determină o expresie distanței d ca funcție de b și de mărimile (1). Poți include mărimile r_2 și h_2 ca variabile în expresia pe care o scrii, deoarece aceste mărimi vor fi calculate la sarcina de lucru **A.5**.	0.4pt

A.4	Determină expresia momentului de inerție I_S ca funcție de b și de mărimile (1). Poți include, ca variabile, în expresie mărimile r_2 și h_2 , deoarece acestea vor fi calculate în sarcina de lucru **A.5**.	0.7pt

A.5	Folosind toate rezultatele de mai sus, scrie expresiile pentru h_2 și r_2 în funcție de b, T și de mărimile cunoscute (1). Poți exprima h_2 ca funcție de r_2.	1.1pt

Partea B. Stația Spațială în rotație (6,5 puncte)

Alice este o astronaută care trăiește în Stația Spațială. Stația Spațială este o roată gigantică de rază R , care se rotește în jurul axei sale, asigurând astfel astronauților o gravitație artificială. Astronauții locuiesc în partea interioară a inelului exterior al roții. Atracția gravitațională a Stației Spațiale ca și curbura podelei sale pot fi ignorate.

B.1	Cu ce viteză unghiulară ω_{ss} trebuie să se rotească stația spațială, astfel încât astronauții să simtă o accelerație identică cu accelerația gravitațională g_El a suprafața Pământului ?	0.5pt

Alice și prietenul ei astronaut Bob au o controversă. Bob nu crede că ei se află cu adevarat într-o stație spațială, ci că se află pe Pământ.. Alice dorește să-i demonstreze lui Bob că se află pe o stație spațială rotitoare, folosind argumente din fizică. În acest scop, ea atașează o masă m la un resort cu constanta de elasticitate k și pune sistemul în oscilație. Masa oscilează numai pe direcție verticală și nu poate deplasa pe direcția orizontală.

B.2	Presupunând că gravitația Pământului este constantă și are accelerația g_E, care ar trebui să fie pulsația ω_E pe care ar măsur-o o persoană aflată pe Pământ?	0.2pt

B.3	Care este pulsația ω a oscilației pe care Alice o măsoară în Stația Spațială?	0.6pt

Alice este convinsă că experimentul propus de ea dovedește faptul că astronauții se află pe o stație spațială în rotație. Bob rămâne sceptic. El susține că dacă se ia în considerare variația gravitației în apropierea suprafeței Pământului se poate determina un efect similar. În sarcinile de lucru care urmează se investighează dacă Bob are dreptate.

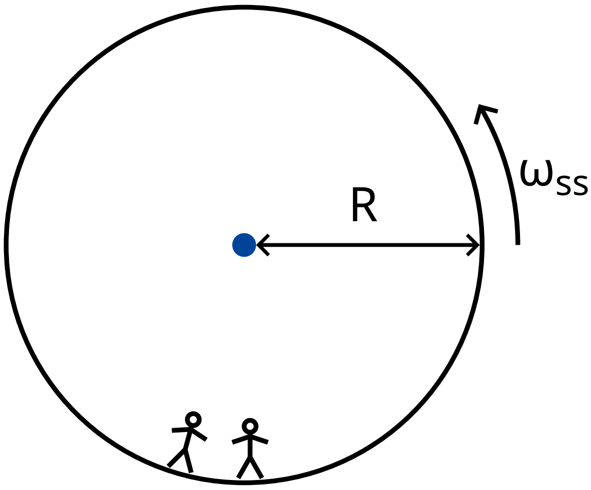

Figura 4: Stația Spațială

B.4	Dedu o expresie a accelerației gravitaționale $g_E(h)$ pentru înălțimi mici deasupra suprafeței Pământului și calculează pulsația corespunzătoare $\tilde{\omega}_E$ a masei care oscilează (este suficientă aproximația liniară). Notează raza Pământului cu R_E.	0.8pt

Într-adevăr, pentru această stație spațială, Alice determină că pendulul cu resort oscilează cu frecvența prezisă de Bob.

B.5	Care ar trebui să fie raza stației spațiale R , astfel încât pulsația ω a oscilației în stația spațială să fie egală cu pulsația $\tilde{\omega}_E$ a oscilației pe Pământ. Exprimă rezultatul în funcție de R_E.	0.3pt

Exasperată de încăpățânarea lui Bob, Alice vine cu ideea unui alt experiment pentru a-și proba punctul de vedere. În acest scop ea se urcă pe un turn de înălțime H de pe suprafața stației spațiale și lasă să cadă o masă. Acest experiment poate fi înțeles atât într-un sistem de referință în rotație, cât și într-un sistem de referință inerțial.

În sistemul de referință aflat în rotație uniformă, astronauții percep o forță fictivă $\vec{F}_C$ numită forță Coriolis. Forța $\vec{F}_C$ care acționează asupra unui obiect de masă m care se deplasează cu viteza $\vec{v}$ într-un sistem care se rotește cu viteză unghiulară constantă $\vec{\omega}_{ss}$ este dată de

$$\vec{F}_C = 2m\vec{v} \times \vec{\omega}_{ss} \; . \tag{2}$$

În termeni de mărimi scalare poți folosi relația

$$F_C = 2mv\omega_{ss} \sin\phi \; , \tag{3}$$

unde ϕ este unghiul dintre viteză și axa de rotație. Forța este perpendiculară atât pe viteza v cât și pe axa de rotație. Semnul forței poate fi determinat cu regula mâinii drepte, dar în ceea ce urmează îl poți alege după dorință.

B.6	Calculează viteză orizontală v_x și deplasarea orizontală d_x (relativă la baza turnului și în direcție perpendiculară pe turn) a masei la momentul în care aceasta atinge podeaua. Vei presupune că înălțimea H a turnului este mică- astfel încât accelerația așa cum este măsurată de astronauți este constantă în timpul căderii. Poți de asemenea presupune că $d_x \ll H$.	1.1pt

Pentru a obține un rezultat bun Alice decide să refacă acest experiment de pe un turn mult mai înalt decât înainte. Spre surpriza sa, masa atinge podeaua la baza turnului astfel încât $d_x = 0$.

B.7	Găsește limita de jos a înălțimii pe care o poate avea turnul, astfel încât $d_x = 0$.	1.3pt

Alice dorește să facă o ultimă încercare de a-l convinge pe Bob. Ea vrea să folosească oscilatorul cu resort pentru a evidenția efectul forței Coriolis. În acest scop, ea modifică montajul original: ea atașează resortul de un inel care alunecă liber pe o bară orizontală, în direcția x în absența oricărei frecări. Resortul însuși oscilează în direcția y . Bara este paralelă cu solul și este perpendiculară pe axa de rotație a stației spațiale. Planul xy este prin urmare perpendicular pe axa de rotație cu direcția y orientată drept spre centrul de rotație al stației.

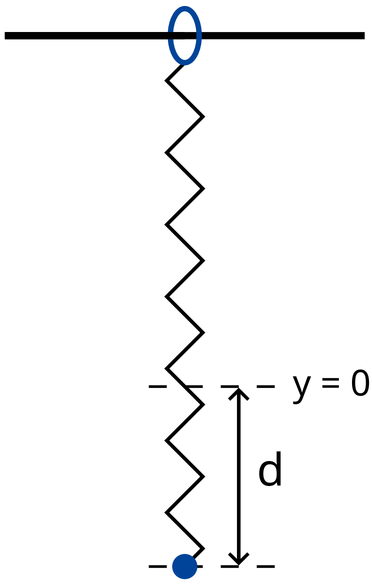

Figura 5: Dispozitivul experimental.

B.8	Alice trage de masă pe distanța d în jos față de poziția de echilibru $x = 0$, $y = 0$ și apoi o eliberează (vezi figura 5). • Dedu o expresie algebrică pentru $x(t)$ și pentru $y(t)$. Poți presupune că $\omega_{ss} d$ este mic și neglijează forța Coriolis pentru mișcarea în lungul axei y . • Schițează traiectoria $(x(t), y(t))$, marcându-i toate caracteristicile importante - ca de exemplu amplitudinea.	1.7pt

Alice și Bob continuă să se contrazică.