

مسألان في الميكانيكا (10 علامات)

رجاءاً أقرأ التعليمات العامة في المغلف المنفصل قبل البداية في هذه المسألة.

الجزء A: القرص المخفي (3.5 علامة)

لدينا أسطوانة خشبية بنصف قطر r_1 وسمك h_1 (طول) في مكان ما داخل الأسطوانة الخشبية تم استبدال الخشب بقرص معدني بنصف قطر r_2 وسمك h_2 . تم وضع القرص المعدني بحيث أن محور تناظره B يكون موازياً لمحور تناظر الأسطوانة الخشبية S ، ووضع على نفس المسافة من الجهتين العلوية والسفلية للأسطوانة ونرمز للمسافة بين S و B بالرمز d . كثافة الخشب ρ_1 ، وكثافة المعدن ρ_2 حيث $\rho_2 > \rho_1$. الكتلة الكلية للأسطوانة الخشبية مع القرص المعدني بداخلها هي M .

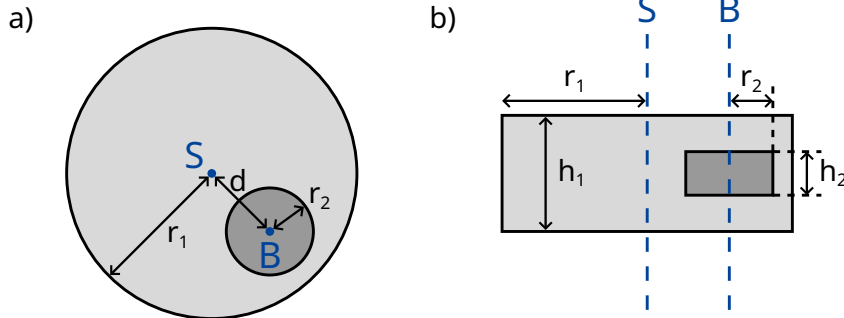
في هذه المهمة نقوم بوضع الأسطوانة الخشبية على الأرض بحيث أنه يمكنها الدحرجة بحرية يميناً ويساراً. انظر الشكل 1 لمنظر جانبي ومنظر علوي لهذا الوضع.

الهدف في هذه المهمة هو تحديد حجم وموقع القرص المعدني.

فيما يلي وعندما يطلب منك إعطاء النتيجة بدلالة الكميات الفيزيائية المعروفة، يمكنك دائماً اعتبار أن الكميات التالية معروفة:

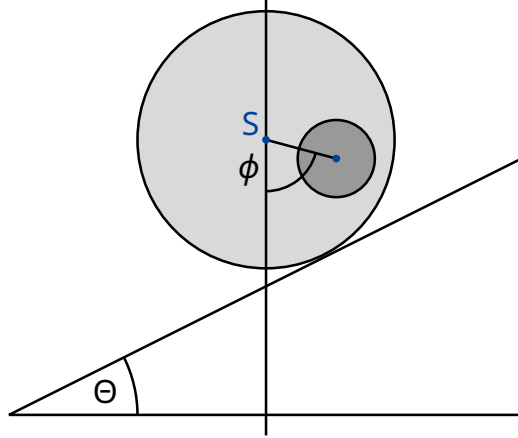
$$r_1, h_1, \rho_1, \rho_2, M. \quad (1)$$

الهدف هو تحديد h_2, h_2 و d ، من خلال قياسات غير مباشرة.



شكل 1: a) منظر جانبي b) منظر علوي

نرمز للمسافة بين مركز الكتلة C للنظام ككل و محور التناظر S للأسطوانة الخشبية بالرمز b . وبغرض تحديد هذه المسافة قمنا بتصميم التجربة التالية: نضع الأسطوانة الخشبية على قاعدتها الأفقية بحيث تكون بحالة اتزان مستقر. ثم نقوم برفع القاعدة ببطء بزاوية θ (انظر الشكل 2). وكننتيجة للاحتكاك السكوني، فإن الأسطوانة ستتدحرج دون أن تنزلق. ستتدحرج إلى أسفل المنحدر قليلاً، لكنها ستتوقف في اتزان مستقر بعد الدوران بزاوية ϕ التي نقوم بقياسها.

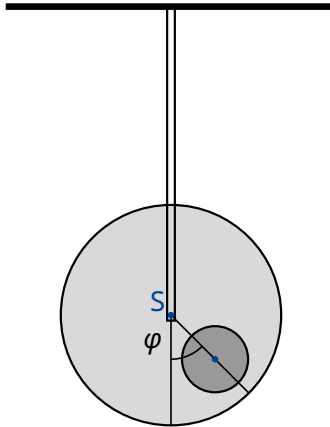


شكل 2: الأسطوانة على قاعدة منحدر.

0.8pt

A.1 جد تعبير رياضي لـ b كدالة للكميات (1)، الزاوية ϕ و زاوية انحدار القاعدة θ .

من الأن فصاعداً، يمكن اعتبار أن قيمة b معروفة.



شكل 3: نظام معلق.

في الخطوة القادمة نريد قياس عزم القصور الذاتي I_S للنظام بالنسبة لمحور التناظر S . ولهذا الغرض، نعلق الأسطوانة الخشبية من محور تناظرها بقضيب صلب ثم نديرها بزاوية صغيرة φ بعيداً عن موقع اتزانها ونقوم بتركها. انظر شكل 3 لهذا الترتيب. نجد أن φ تتغير بشكل دوري بزمين دوري T .

0.5pt

A.2 أوجد معادلة الحركة لـ φ . عبر عن عزم القصور الذاتي I_S للنظام حول محور تناظره S بدلالة T ، b و الكميات المعروفة (1). يمكننا افتراض أن φ دائماً صغيرة جداً وذلك لأن الاختلال عن موضع الإتزان يكون صغيراً.

من القياسات في الأسئلة **A.1** و **A.2** نرغب بتحديد الأبعاد الهندسية وموقع القرص المعدني داخل الأسطوانة الخشبية.

A.3 أوجد تعبير رياضي للمسافة d كدالة لـ b و k والكميات (1). يمكنك تضمين r_2 و h_2 كمتغيرات في تعبيرك الرياضي، ذلك لأنهما سيحسبان في المهمة الفرعية **A.5**. **0.4pt**

A.4 أوجد تعبير رياضي لعزم القصور الذاتي I_S بدلالة b و k والكميات المعروفة (1)، يمكنك أيضاً تضمين r_2 و h_2 كمتغيرات في تعبيرك الرياضي، وذلك لأنهما سيحسبان في المهمة الفرعية **A.5**. **0.7pt**

A.5 باستخدام النتائج أعلاه اكتب تعبير رياضي لـ h_2 و r_2 بدلالة T ، b و k والكميات المعروفة (1). يمكنك تمثيل h_2 كدالة بـ r_2 . **1.1pt**

الجزء B: محطة الفضاء الدوارة (6.5 علامة)

أليس (Alice) هي رائدة فضاء تعيش على محطة فضائية. المحطة الفضائية هي على شكل عجلة (wheel) عملاقة بنصف قطر R تدور حول محورها، مما يؤدي إلى تكوين جاذبية صناعية لرواد الفضاء. يعيش رواد الفضاء على الجهة الداخلية لحافة العجلة. يمكن إهمال التجاذب بين المحطة الفضائية و السطح المنحني لها .

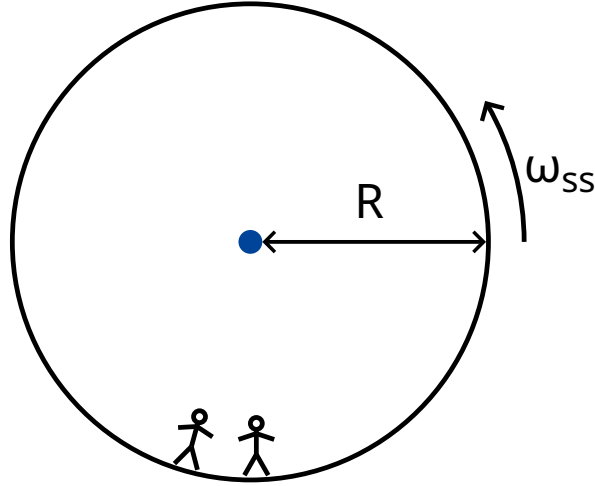
B.1 ما قيمة التردد الزاوي ω_{ss} الذي تدور به المحطة الفضائية حيث أن رواد الفضاء يشعرون بنفس الجاذبية على سطح الأرض g_E ؟ **0.5pt**

حدث جدال بين أليس (Alice) و راند الفضاء صديقها بوب (Bob) بوب غير مقتنع أنهما حقيقة يعيشان في الفضاء و يدعي أنهما على الأرض. تريد أليس أن تثبت لبوب أنهما يعيشان في محطة فضاء دوارة وذلك باستخدام الفيزياء. لهذا الغرض تقوم بتثبيت كتلة m إلى زنبرك ذي ثابت زنبرك k و تتركها تهتز. تهتز الكتلة فقط باتجاه رأسي و لا يمكنها الحركة باتجاه أفقي.

B.2 افرض أن الجاذبية الأرضية ثابتة وبتسارع g_E ، كم سيكون التردد الزاوي للاهتزازات ω_E الذي يقوم شخص على الأرض بقياسه؟ **0.2pt**

B.3 كم يكون تردد الاهتزازات الزاوي ω الذي تقوم (أليس) بقياسه في المحطة الفضائية؟ **0.6pt**

(أليس) مقتنعة أن تجربتها تثبت أنهما في مركبة فضائية دوارة. و (بوب) لا يزال متشككاً. وهو يدعي أنه في حال أخذ التغير في الجاذبية على سطح الأرض بالحسبان فإننا سنجد تأثيراً مشابهاً، سنحقق في المهمة التالية إذا كان بوب على حق.



شكل 4: المحطة الفضائية

B.4 اشتق تعبيراً رياضياً للجاذبية $g_E(h)$ لأرتفاعات صغيرة h فوق سطح الأرض (يكون التقريب الخطي كافياً) و **0.8pt** احسب التردد الزاوي $\tilde{\omega}_E$ لكتلة مهتزة . ارمز لنصف قطر الأرض بـ R_E . اهل دوران الأرض.

في الواقع، لهذه المحطة الفضائية، وجدت (أليس) أن البندول الزنبركي يهتز بالتردد الذي توقعه (بوب).

B.5 لأي قيمة لنصف القطر R للمحطة الفضائية يكون تردد الاهتزاز ω متوافقاً مع تردد الاهتزاز $\tilde{\omega}_E$ على سطح الأرض ؟ عبر عن إجابتك بدلالة R_E . **0.3pt**

وهي مستاءة من عناد (بوب)، خرجت (أليس) بفكرة لإثبات وجهة نظرها . لهذا الغرض صعدت على برج بارتفاع H فوق السطح الداخلي للمحطة (أرضها الافتراضية) و أسقطت كتلة. يمكن فهم هذه التجربة في نظام مرجعي دوار أو بنفس الكفاءة في نظام مرجعي قصوري. في نظام مرجعي يدور بشكل منتظم، هنالك قوة تخيلية \vec{F}_C تسمى قوة كوريوليس force Coriolis . القوة \vec{F}_C التي تؤثر على جسم كتلته m و يتحرك بسرعة \vec{v} في نظام مرجعي دوار بتسارع زاوي ثابت $\vec{\omega}_{ss}$ تعطى بالعلاقة

$$\vec{F}_C = 2m\vec{v} \times \vec{\omega}_{ss} . \quad (2)$$

بدلالة الكميات الفيزيائية القياسية يمكنك استخدام

$$F_C = 2mv\omega_{ss} \sin \phi , \quad (3)$$

حيث أن ϕ هي الزاوية بين السرعة و محور الدوران. وتكون القوة عمودية على كل من السرعة v و محور الدوران. يمكن تحديد إشارة هذه القوة باستخدام قاعدة اليد اليمنى، لكن فيما يتبع يمكنك أخذها بحرية.

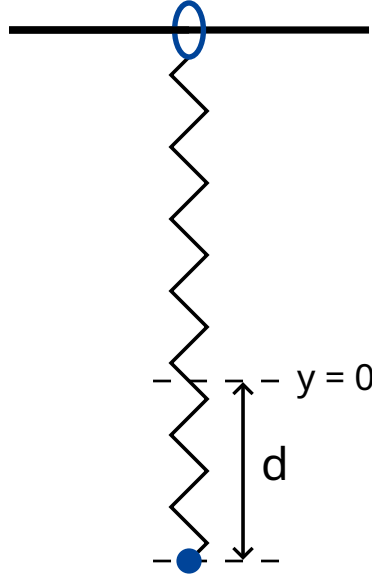
B.6 احسب السرعة الأفقية v_x و الإزاحة الأفقية d_x (بالنسبة لقاعدة البرج) للكتلة لحظة اصطدامها بسطح المركبة. **1.1pt** بإمكانك افتراض أن ارتفاع البرج H صغيراً، بحيث أن التسارع العامودي الذي يقيسه رواد الفضاء يكون ثابتاً خلال السقوط. يمكنك أيضاً افتراض أن $d_x \ll H$.

للحصول على نتيجة جيدة، قررت (أليس) إجراء التجربة من برج أعلى كثيراً من السابق. وتفاجأت أن الكتلة اصطدمت بالأرض عند قاعدة البرج بحيث أن $d_x = 0$.

1.3pt

B.7 من هذه المعادلة أوجد الحد الأدنى لإرتفاع البرج لإمكانية حدوث $d_x = 0$.

ترغب (أليس) بإجراء محاولة أخيرة لإقناع (بوب). ترغب باستخدام الهزاز الزنبركي لإظهار تأثير قوة كوريولس. لهذا الغرض قامت بتغيير الترتيب الأصلي: قامت بتثبيت الزنبرك مع حلقة يمكنها الإنزلاق بشكل حر على قضيب أفقي باتجاه محور x و بدون احتكاك. والزنبرك يهتز باتجاه محور y . القضيب موازي للأرض (الإفتراضية للمحطة) وعمودي على محور دوران المحطة الفضائية. مستوى xy لذلك يكون عمودياً على محور الدوران، يشير اتجاه y بشكل مستقيم إلى مركز دوران المحطة.



شكل 5: الترتيب (للتجربة)

1.7pt

B.8 تقوم (أليس) بسحب الكتلة مسافة d للأسفل من نقطة الإتزان عند النقطة $x = 0$ و $y = 0$ ثم تتركها تتحرك (انظر شكل 5).

- اعط تعبير جبري لـ $x(t)$ و $y(t)$. يمكنك افتراض أن $\omega_{ss} d$ صغيرة، و اهمل قوة كوريولس للحركة على طول محور y .
- ارسم المسار $(x(t), y(t))$ ، موضحاً جميع المعالم الرئيسية مثل السرعة.

لا يزال بوب و أليس يتجادلان.