

Dos Problemas en Mecánica (10 puntos)

Por favor asegúrese de leer las instrucciones generales dentro del sobre adjunto antes de comenzar a resolver este problema.

Parte A. El Disco Escondido (3.5 puntos)

Consideramos un cilindro de madera de radio r_1 y grosor h_1 . En algún lugar dentro del cilindro de madera, la madera ha sido reemplazada por un disco de metal de radio r_2 y grosor h_2 . El disco de metal está ubicado de tal forma que su eje de simetría B es paralelo al eje de simetría S del cilindro de madera. El disco de metal se coloca a la misma distancia de la cara superior y la parte inferior del cilindro de madera. Denotamos la distancia entre S y B como d . La densidad de la madera es ρ_1 , mientras que de la del metal es $\rho_2 > \rho_1$. La masa total del cilindro de madera con el disco de metal dentro es M .

En este problema ubicamos el cilindro de madera sobre una base horizontal de tal forma que pueda rodar libremente hacia la izquierda y la derecha. Vea la Figura 1 para una vista lateral y superior del montaje.

El objetivo del problema es determinar el tamaño y posición del disco de metal.

En lo que sigue, cuando se le pida expresar el resultado en términos de cantidades conocidas, puede asumir que las cantidades conocidas son:

$$r_1, h_1, \rho_1, \rho_2, M. \quad (1)$$

El objetivo es determinar r_2, h_2 y d , a través de mediciones indirectas.

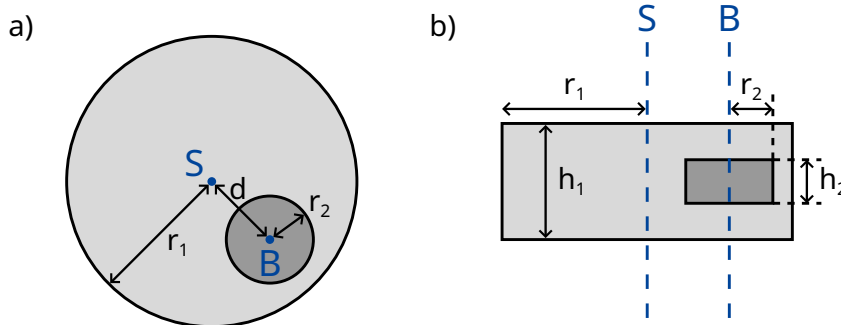


Figura 1: a) vista lateral b) vista superior.

Denotamos b a la distancia entre el centro de masa C de todo el sistema y el eje de simetría S del cilindro. Para determinar esta distancia, diseñamos el siguiente experimento: ubicamos el cilindro sobre una base horizontal de manera que se halle en equilibrio estable. Ahora inclinamos la base lentamente hasta formar un ángulo Θ con la horizontal (ver Fig. 2). Como resultado de la fricción estática, el cilindro puede rodar libremente sin deslizar. Este va a rodar un poco hacia abajo, pero luego va a detenerse en un equilibrio estable después de haber rotado un ángulo ϕ el cual medimos.

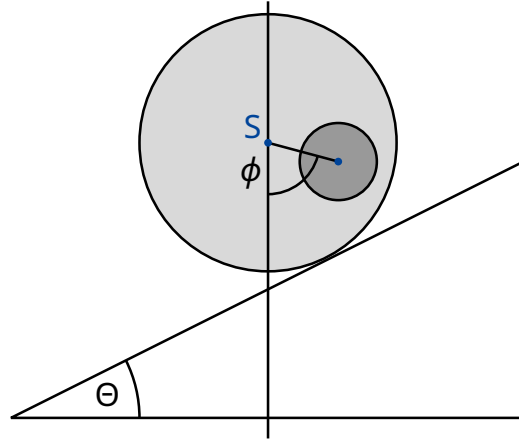


Figura 2: Cilindro sobre base inclinada.

- A.1** Encuentre una expresión para b como función de las cantidades (1), el ángulo ϕ y el ángulo de inclinación de la base Θ . 0.8pt

Desde ahora asumiremos que el valor de b es conocido.

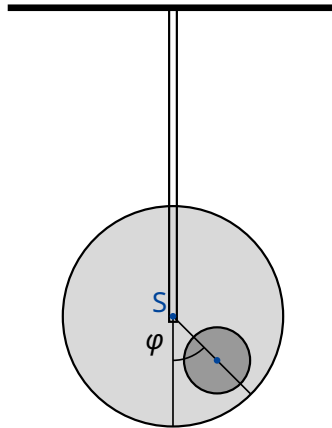


Figura 3: Sistema suspendido

A continuación queremos medir el momento de inercia I_S del sistema con respecto al eje de simetría S . Con este objetivo suspendemos el cilindro de su eje de simetría desde una varilla rígida. Luego lo giramos ligeramente de su posición de equilibrio en un ángulo pequeño φ y lo soltamos. Vea la figura 3 para el montaje. Encontramos que φ describe un movimiento periódico con período T .

- | | | |
|------------|---|-------|
| A.2 | Encuentre la ecuación de movimiento para φ . Exprese el momento de inercia I_S del sistema alrededor de su eje de simetría S en términos de T , b y las cantidades conocidas (1). Puede asumir que solo perturbamos el equilibrio ligeramente, de tal forma que φ siempre es muy pequeño. | 0.5pt |
|------------|---|-------|

Partiendo de las mediciones de las preguntas **A.1** y **A.2**, queremos determinar la geometría y la posición del disco de metal dentro del cilindro.

- | | | |
|------------|--|-------|
| A.3 | Encuentre una expresión para la distancia d como función de b y las cantidades (1). También puede incluir r_2 y h_2 como variables en su expresión, ya que se calcularán en el inciso A.5 . | 0.4pt |
|------------|--|-------|

- | | | |
|------------|--|-------|
| A.4 | Encuentre una expresión para el momento de inercia I_S en términos de b y las cantidades conocidas (1). También puede incluir r_2 y h_2 como variables en su expresión, ya que se calcularán en el inciso A.5 . | 0.7pt |
|------------|--|-------|

- | | | |
|------------|--|-------|
| A.5 | Usando todos los resultados anteriores, escriba una expresión para h_2 y r_2 en términos de b , T y las cantidades (1). Puede expresar h_2 como una función de r_2 . | 1.1pt |
|------------|--|-------|

Parte B. Estación espacial en rotación (6.5 puntos)

Alice es una astronauta viviendo en una estación espacial. La estación espacial es una rueda gigante de radio R rotando alrededor de su eje de tal forma que provee gravedad artificial a los astronautas. Los astronautas viven en el costado interior de la rueda. La atracción gravitacional de la estación espacial y la curvatura de su superficie pueden ser ignoradas.

- | | | |
|------------|---|-------|
| B.1 | ¿Con qué frecuencia angular ω_{ss} debe rotar la estación espacial para que los astronautas perciban la misma aceleración gravitacional g_E que en la superficie de la tierra? | 0.5pt |
|------------|---|-------|

Alice y su amigo astronauta Bob tienen un desacuerdo. Bob no cree que en realidad estén viviendo en una estación espacial sino en la Tierra. Alice quiere probarle a Bob, usando la física, que en realidad viven en una estación espacial rotando. Con este objetivo, Alice amarra una masa m a un resorte con constante elástica k y le deja oscilar. La masa oscila solo en la dirección vertical y no se puede mover en la dirección horizontal.

- | | | |
|------------|--|-------|
| B.2 | Asumiendo que la aceleración gravitacional sobre la tierra es constante con valor g_E , ¿cuál sería la frecuencia de oscilación ω_E que una persona en la Tierra mediría? | 0.2pt |
|------------|--|-------|

- | | | |
|------------|--|-------|
| B.3 | ¿Qué frecuencia angular de oscilación ω mide Alice en la estación espacial? | 0.6pt |
|------------|--|-------|

Alice está convencida de que su experimento comprueba que se encuentran en una estación espacial rotando. Bob permanece escéptico. Él asegura que al tomar en cuenta el cambio de la gravedad sobre la superficie de la tierra, uno encuentra un efecto similar. En los siguientes problemas investigamos si Bob está en lo correcto.

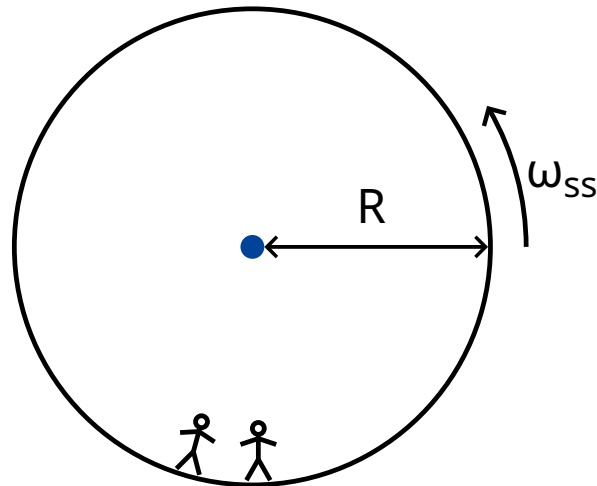


Figure 4: Estación Espacial

- B.4** Encuentre una expresión para la gravedad $g_E(h)$ para alturas pequeñas h sobre la superficie de la tierra y calcule la frecuencia de oscilación $\tilde{\omega}_E$ de la masa oscilante (una aproximación lineal es suficiente). El radio de la tierra es denotado por R_E . Desprecie la rotación de la Tierra. 0.8pt

En efecto, Alice encuentra que el resorte oscila con la frecuencia que Bob predijo.

- B.5** ¿Para qué radio R de la estación espacial coincidirá la frecuencia de oscilación ω con la frecuencia de oscilación en la Tierra $\tilde{\omega}_E$? Exprese su respuesta en términos de R_E . 0.3pt

Exasperada con la terquedad de Bob, a Alice se le ocurre la idea de usar la fuerza de Coriolis para probar que tiene razón. Para esto, sube a una torre de altura H con respecto a la base de la estación espacial y suelta una masa. Este experimento puede ser estudiado tanto en el sistema de referencia rotando como en el sistema de referencia inercial.

En un marco de referencia rotando uniformemente los astronautas perciben una fuerza ficticia \vec{F}_C llamada fuerza de Coriolis. La fuerza \vec{F}_C actuando sobre un objeto de masa m moviéndose a velocidad \vec{v} en un marco de referencia rotando con frecuencia angular constante $\vec{\omega}_{ss}$ está dada por

$$\vec{F}_C = 2m\vec{v} \times \vec{\omega}_{ss} . \quad (2)$$

En términos de las cantidades escalares que se le permite usar

$$F_C = 2mv\omega_{ss} \sin \phi , \quad (3)$$

donde ϕ es el ángulo entre la velocidad y el eje de rotación. La fuerza es perpendicular tanto a la velocidad v como al eje de rotación. El signo de la fuerza se puede determinar por medio de la regla de la mano derecha, pero en lo que sigue le puede escoger libremente.

- B.6** Calcule la velocidad horizontal v_x y el desplazamiento horizontal d_x (relativo a la base de la torre, en dirección perpendicular a la torre) de la masa al momento que esta golpea el suelo. Puede asumir que la altura H de la torre es pequeña, de manera que la aceleración medida por los astronautas es constante durante la caída, también puede asumir que $d_x \ll H$. 1.1pt

Para obtener un buen resultado, Alice decide llevar a cabo el experimento en una torre mucho más alta que la anterior. Para su sorpresa, la masa golpea el suelo justo en la base de la torre, tal que $d_x = 0$.

- B.7** Encuentre un límite inferior para la altura de la torre para el cual puede ocurrir que $d_x = 0$. 1.3pt

Alice está dispuesta a hacer un último intento por convencer a Bob. Ella quiere usar su oscilador con resorte para mostrar el efecto de la fuerza de Coriolis. Para este efecto, ella cambia el montaje original: ella cuelga el resorte de un anillo que puede deslizarse libremente sobre una vara horizontal en la dirección x sin fricción. El resorte como tal oscila en la dirección y . La vara se encuentra paralela al suelo y perpendicular al eje de rotación de la estación espacial. El plano xy es por lo tanto perpendicular al eje de rotación, con la dirección y apuntando directamente hacia el centro de rotación de la estación.

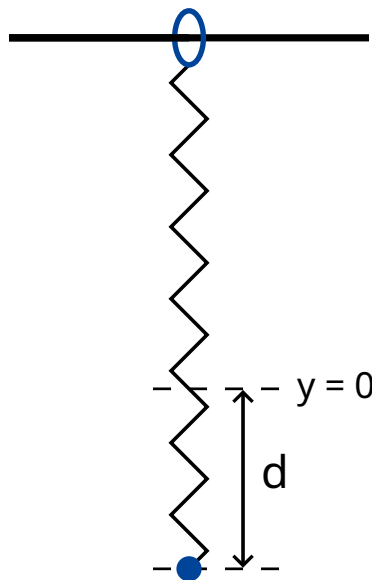


Figura 4: Montaje.

- B.8** Alice hala la masa una distancia d hacia abajo con respecto al punto de equilibrio $x = 0, y = 0$, y luego la suelta (ver figura 5). 1.7pt
- Encuentre una expresión algebraica para $x(t)$ y $y(t)$. Puede asumir que $\omega_{ss}d$ es una cantidad pequeña, y desprecie la fuerza Coriolis para el movimiento a lo largo del eje y .
 - Dibuje la trayectoria $(x(t), y(t))$, marcando todas las características importantes tales como la amplitud.

Alice y Bob continúan en desacuerdo.