Два проблема из Механике

Молимо вас да прочитате општа упутства која се налазе у посебној коверти пре него што почнете са решавањем задатака.

Део A. Скривени диск (3.5 поена)

У овом делу задататка разматрамо крути дрвени цилиндар радијуса r_1 и дебљине h_1. Негде унутар дрвеног цилиндра, дрво је замењено металним диском радијуса r_2 и дебљине h_2. Метални диск је смештен тако да је његова оса симетрије B паралелна оси симетрије дрвеног цилиндра S, и налази се на средини у односу на базисе дрвеног цилиндра (слика 1б). Растојање између оса S и B износи d. Густина дрвета је ρ_1, а густина метала ρ_2 ($\rho_2 > \rho_1$). Укупна маса овог система (дрвени део и метални диск) је M.

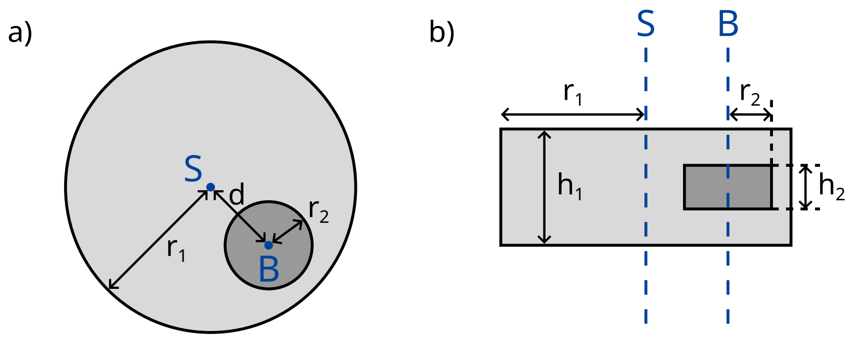
У овом делу задатка, дрвени цилиндар је постављен на подлогу тако да се може слободно котрљати. Видети слику 1. за изглед диска са стране и одозго.

Циљ овог задатка је одредити величину и позицију металног диска.

За све даље рачуне у делу A овог задатка, резултате изразити преко следећих познатих величина:

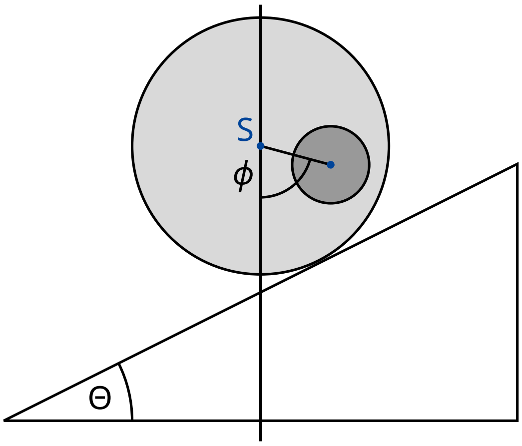
$$r_1,\ h_1,\ \rho_1,\ \rho_2, M\ . \tag{1}$$

Циљ је одредити r_2, h_2 и d, помоћу индиректних мерења.



Слика 1: a) поглед са стране b) поглед одозго

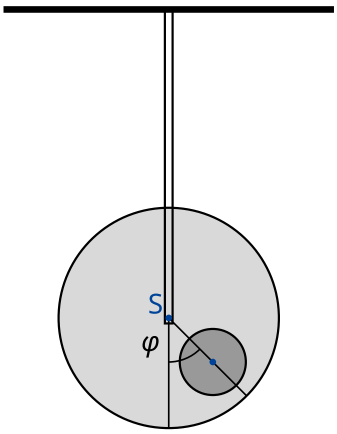
Величина b представља растојање између центра масе C целог система и осе симетрије S дрвеног цилиндра. Како би одредили ово растојање, постављен је следећи експеримент: Дрвени цилиндар је постављен на хоризонталну подлогу тако да се налази у стабилној равнотежи. Један крај подлоге се затим полако подиже, тако да настаје стрма раван нагибног угла Θ (слика 2.) Као резултат статичког трења, дрвени цилиндар се може слободно окретати без клизања. Он ће се откотрљати мало низ стрму раван и затим остати у стању мировања, након ротације за познати угао ϕ.



Слика 2. Цилиндар на стрмој равни.

A.1	Наћи израз за растојање b као функцију величина (1), угла ϕ и нагибног угла стрме равни Θ.	0.8pt

Од сада надаље, величину b сматрати познатом.



Слика 3: Систем који осцилује.

Следећа величина коју желимо да измеримо је момент инерције I_S цилиндра у односу на осу симетрије S. Ово ћемо урадити тако што ћемо цилиндар пустити да осцилује око осе симетрије S. Ово је урађено тако што је цилиндар (слика 3.) изведен из равнотежног положаја за мали угао φ. Цилиндар ће у овом случају описивати периодично кретање са периодом T.

A.2	Наћи једначину кретања за φ. Изразити момент инерције I_S система око осе симетрије S преко величина T, b и осталих познатих величина (1). Може се претпоставити да је цилиндар изведен из равнотежног положаја за малу вредност угла, тако да је угао отклона φ у сваком тренутку мали.	0.5pt

Помоћу мерења из делова **A.1** и **A.2** сада желимо да одредимо радијус и положај металног диска унутар дрвеног цилиндра.

A.3	Наћи израз за растојање d као функцију величине b и познатих величина (1). У коначном изразу за овај део задатка користити и величине r_2 и h_2 (пошто ће оне бити израчунате у делу **A.5**).	0.4pt

A.4	Наћи израз за момент инерције I_S преко величине b и познатих величина (1). У коначном изразу за овај део задатка користити и величине r_2 и h_2 (пошто ће оне бити израчунате у делу **A.5**).	0.7pt

A.5	Користећи све претходне резултате, написати израз за h_2 и r_2 преко величина b, T и осталих познатаих величина (1). Величину h_2 у крајњем изразу можете оставити као функцију r_2 (уколико је израз за r_2 дат експлицитно преко познатих величина).	1.1pt

Део B. Ротирајућа свемирска станица (6.5 поена)

Ана је астронаут која живи на свемирској станици. Свемирска станица је огроман точак радијуса R који ротира око своје осе и тако обезбеђује вештачку гравитацију астронаутима. Астронаути живе на унутрашњој страни обода точка. Сматрати да је свемирска станица довољно мале масе, тако да се њено гравитационо привлачење може занемарити. Такође, занемарити и закривљеност пода.

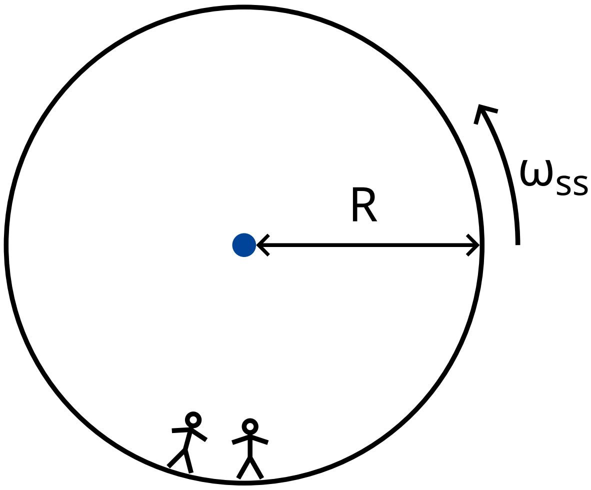
B.1	Којом угаоном фреквенцом ω_{ss} се окреће свемирска станица уколико астронаути осећају исто гравитационо убрзање g_E као и на површини Земље?	0.5pt

Ана и њен друг, астронаут Бојан имају следећу дискусију. Бојан не верује да они заправо живе на свемирској станици и тврди да се они налазе на Земљи. Ана жели да докаже Бојану да они заиста живе на ротирајућој свемирској станици користећи законе физике. Због тога, она качи тег масе m на опругу константе еластичности k и пушта га да осцилује. Тег осцилује само у вертикалном правцу, и не може да се креће у хоризонталном правцу.

B.2	Претпостављајући да је на Земљи гравитационо убрзање константно и износи g_E, коју угаону фреквенцу би тег имао на Земљи?	0.2pt

B.3	Коју угаону фреквенцу осциловања ω би Ана измерила на свемирској станици?	0.6pt

Ана је убеђена да њен експеримент доказује да се они налазе на ротирајућој свемирској станици. Бојан и даље не верује. Он тврди да уколико се узме да гравитационо убрзање на Земљи није константно, већ се урачуна промена гравитационог убрзања са променом висине, добиће се сличан ефекат. У следећем делу задатка испитујемо да ли је Бојан у праву.



Слика 4: Свемирска станица

B.4	Извести израз за гравитационо убрзање $g_E(h)$ у функцији висине h (за мале вредности висине изнад Земљине површине) и израчунати угаону фреквенцу осциловања тега (линеарна апроксимација је довољна)). Радијус Земље R_E сматрати познатим. Занемарити утицај ротације Земље.	0.8pt

Заиста, Ана је сада убеђена да тег осцилује са фреквенцом коју је Бојан предвидео.

B.5	За коју вредност радијуса R свемирске станице се фреквенца осцилација ω на свемирској станици поклапа са фреквенцијом осцилација $\tilde{\omega}_E$ на површини Земље? Решење изразити преко R_E.	0.3pt

Огорчена Бојановом тврдоглавошћу, Ана је дошла до следеће идеје за експеримент. Покушаће да искористи Кориолисову силу како би доказала да је она у праву. Како би то урадила, попела се на кулу висине H изнад основе свемирске станице и бацила тег. Овај експеримент се може разматрати како у ротирајућем систему референце, тако и у инерцијалном систему референце.

У систему референце који ротира константном угаоном брзином, на астронаута делује Кориолисова сила. Кориолисова сила $\vec{F}_C$ делује на тег масе m, који се креће брзином $\vec{v}$ у ротирајућем систему референце. Уколико систем референце ротира константном угаоном брзином $\vec{\omega}_{ss}$, Кориолисова сила је дата следећим изразом

$$\vec{F}_C = 2m\vec{v} \times \vec{\omega}_{ss} \,. \tag{2}$$

Интензитет ове силе се може изразити на следећи начин

$$F_C = 2mv\omega_{ss} \sin\phi \,, \tag{3}$$

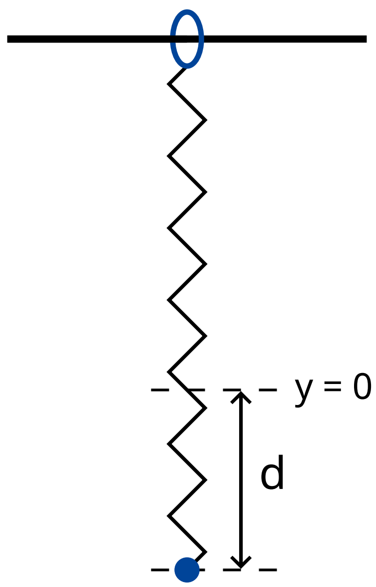
где је ϕ угао између вектора брзине тега и осе ротације. Сила ће бити нормална на вектор брзине v и на осу ротације. Смер силе се може одредити правилом десне руке (мада у овом задатку се може изабрати произвољно).

B.6	Израчунати хоризонталну компоненту брзине v_x и хоризонтални померај d_x (у односу на подножје куле у правцу нормалном на кулу) тега у тренутку када тег падне на под. Може се претпоставити да је висина куле H мала, тако да је убрзање тега ка поду током пада константно. Такође, може се претпоставити да је $d_x \ll H$.	1.1pt

Како би проверила резултат, Ана одлучује да понови експеримент али овог пута са много више куле. На њено изненађење, тег је пао на под на истом месту где је подножје куле, тј. тако да је $d_x = 0$.

B.7	Наћи најмању висину куле за коју се може догодити да је $d_x = 0$.	1.3pt

Ана је спремна да покуша још једном да убеди Бојана. Овога пута ће користити тег на опрузи да би показала утицај Кориолисове силе. Поставка експеримента сада се мења. Опруга је у овом случају закачена за прстен који може слободно да клизи по хоризонталној жици у правци x осе. Опруга све време остаје хоризонтална и осцилује у правцу y осе. Жица на којој је закачен прстен је паралелна подлози и нормална у односу на осу ротације свемирске станице. xy раван је тако нормална на осу ротације, при чему је смер y осе ка центру ротације станице.



Скика 5. Поставка експеримента.

B.8	Ана истеже тег за дужину d у односу на тачку равнотеже $x = 0$, $y = 0$, и пушта га да слободно осцилује (Слика 5.). • Наћи изразе за $x(t)$ и $y(t)$. Можете претпоставити да је $\omega_{ss} d$ мала величина. Занемарити Кориолисову силу која утиче на кретање дуж y-осе. • Скицирати трајекторију тега $(x(t), y(t))$ и означити све релевантне тачке и растојања на слици (као што су амплитуда итд.).	1.7pt

Ана и Бојан настављају дискусију...