

Dve úlohy z mechaniky (10 bodov)

Skôr ako začnete riešiť túto úlohu prečítajte si všeobecné pokyny, ktoré sa nachádzajú vo zvláštnej zložke.

Časť A. Skrytý disk (3.5 boda)

Uvažujme drevený valec s polomerom podstavy r_1 a hrúbkou h_1 . Niekde vo vnútri valca sa nachádza namiesto dreva kovový disk s polomerom r_2 a hrúbkou h_2 . Kovový disk je umiestnený tak, že jeho os symetrie B je rovnobežná s osou symetrie dreveného valca S . Vzďialenosť hornej podstavy disku od hornej podstavy valca je rovnaká ako vzdialenosť dolnej podstavy disku od dolnej podstavy valca. Vzďialenosť medzi osami S a B označíme d . Hustota dreva je ρ_1 a hustota kovu je $\rho_2 > \rho_1$. Celková hmotnosť dreveného valca spolu s kovovým diskom vo vnútri je M .

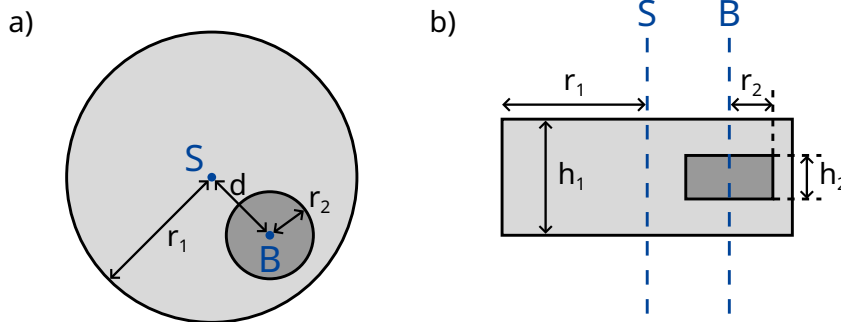
V tejto úlohe postavíme valec na podložku tak, že sa môže voľne prevažovať doľava a doprava. Na obrázku 1 vidíte bočný a horný pohľad na valec.

Cieľom úlohy je určiť rozmery a polohu kovového disku vo valci.

V ďalšej časti, ak sa požaduje vyjadriť výsledky pomocou známych veličín, vždy považujte za známe:

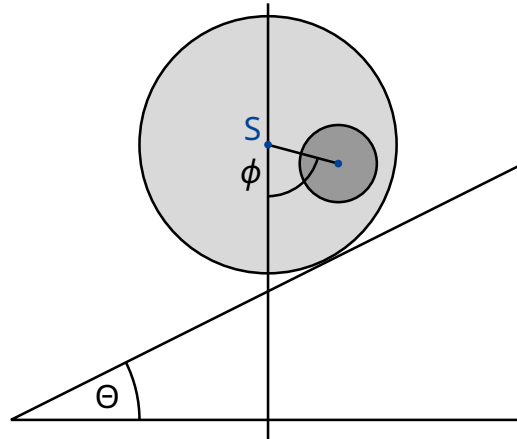
$$r_1, h_1, \rho_1, \rho_2, M. \quad (1)$$

Cieľom úlohy je určiť r_2, h_2 a d , pomocou nepriamych meraní.



Obrázok 1: a) bočný pohľad b) pohľad zhora

Označme b vzdialenosť medzi ťažiskom C celej sústavy a osou symetrie S dreveného valca. Túto vzdialenosť určíme pomocou nasledujúceho experimentu: Postavíme valec na vodorovnú podložku tak, aby bol v stabilnej rovnovážnej polohe. Pomaly zdvihneme podložku o uhol Θ (pozri Obr. 2). V dôsledku statického trenia sa môže drevený valec voľne valiť bez prekĺzavania. Odvalí sa na naklonenej ploche o malú vzdialenosť a zostane v novej v stabilnej rovnovážnej polohe po natočení o uhol ϕ , ktorý zmeriame.

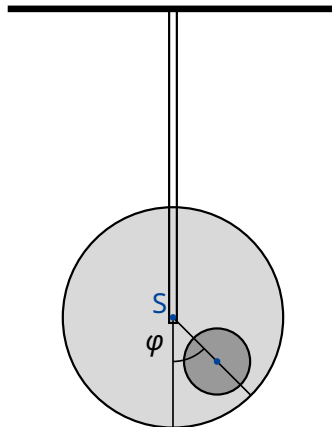


Obrázok 2: Valec na naklonenej rovine

A.1 Vyjadrite b pomocou veličín (1), uhla ϕ a uhla sklonu podložky Θ .

0.8pt

Odteraz považujeme b za známu veličinu.



Obrázok 3: Zavesený valec.

V ďalšom chceme zmerať moment zotrvačnosti I_S sústavy vzhľadom na os symetrie S . Kvôli tomu zavesíme valec pomocou tuhej osky v jeho osi symetrie. Valec vychýlime z rovnovážnej polohy o malý uhol φ , okolo osi S a uvoľníme ho, obr. 3. Zistíme, že φ sa periodicky mení s periódou T .

A.2 Napíšte rovnicu pohybu pre uhol φ . Vyjadrite moment zotrvačnosti I_S sústavy vzhľadom na os symetrie S pomocou T , b a známych veličín (1). Uvažujte len malé výchylky z rovnovážnej polohy, a preto považujte uhol φ za veľmi malý. 0.5pt

Využijeme výsledky merania v úlohách **A.1** a **A.2** k tomu, aby sme určili rozmery a polohu disku vo vnútri valca.

A.3 Nájdite výraz pre vzdialenosť d ako funkciu b a známych veličín (1). Môžete použiť aj r_2 a h_2 ako premenné vo vašom výraze, keďže ich vypočítate v úlohe **A.5**. 0.4pt

A.4 Vyjadrite vzťah pre moment zotrvačnosti I_S pomocou veličiny b a známych veličín (1). Opäť vo vašom výraze sa môžu nachádzať veličiny r_2 a h_2 ako premenné, keďže budú počítané v úlohe **A.5**. 0.7pt

A.5 Pomocou predchádzajúcich výsledkov napíšte vzťah pre h_2 a r_2 pomocou veličín b , T a známych veličín (1). Môžete vyjadriť h_2 ako funkciu r_2 . 1.1pt

Časť B. Rotujúca vesmírna stanica (6.5 boda)

Alica je kozmonautka, ktorá žije na vesmírnej stanici. Vesmírna stanica je veľké koleso, ktorého polomer je R , rotujúce okolo svojej osi. Rotácia kola poskytuje kozmonautom umelú gravitáciu. Kozmonauti žijú na vnútornej strane kola. Hmotnosť vesmírnej stanice neuvažujte, a teda ani jej gravitačné účinky.

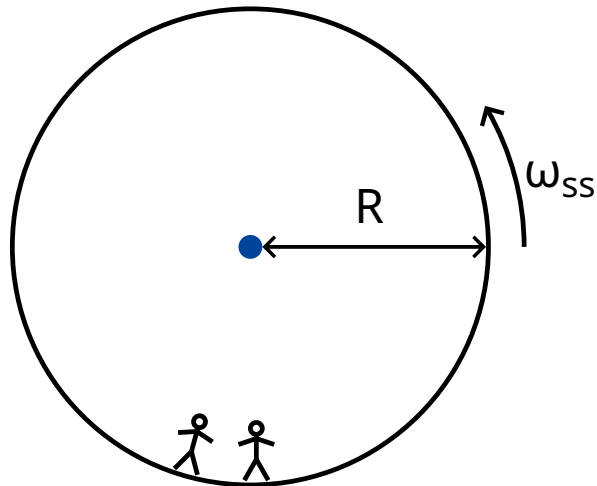
B.1 S akou uhlovou frekvenciou ω_{ss} musí vesmírna stanica rotovať, aby kozmonauti pociťovali rovnaké zrýchlenie g_E aké je na zemskom povrchu? 0.5pt

Alica a jej kamarát Bob, tiež kozmonaut, majú spor. Bob neverí, že žijú na vesmírnej stanici, ktorá je vo vesmíre, a tvrdí, že sú na Zemi. Alica chce Bobovi dokázať, že žijú na rotujúcej vesmírnej stanici, a na to chce využiť fyzikálne zákony. Použije k tomu teleso hmotnosti m , ktoré pripevní na pružinu, ktorej koeficient tuhosti je k . Teleso nechá kmitať, pričom teleso kmitá len vo zvislom smere a vo vodorovnom smere sa pohybovať nemôže.

B.2 Predpokladajte že gravitácia na zemskom povrchu je konštantná a gravitačné zrýchlenie je g_E . Aká bude uhlová frekvencia ω_E harmonického pohybu telesa, ktorú zmeriame na Zemi? 0.2pt

B.3 Akú uhlovú frekvenciu ω zmeria Alica na vesmírnej stanici? 0.6pt

Alica je presvedčená, že jej experiment dokazuje, že sa nachádzajú na vesmírnej stanici. Naopak Bob je stále skeptický. Tvrdí, že keď zoberieme do úvahy zmeny gravitačného zrýchlenia nad zemským povrchom, bude pozorovať podobný efekt. Má pravdu?



Obr. 4: Vesmírna stanica

- B.4** Odvodte vzťah pre gravitačné zrýchlenie $g_E(h)$ na zemi pre malé výšky h nad povrchom zeme a vypočítajte uhlovú frekvenciu $\tilde{\omega}_E$ (stačí lineárne priblíženie). Polomer Zeme je R_E . Rotáciu Zeme neuvažujte. 0.8pt

Alena musela dať Bobovi za pravdu, keďže pružinový oscilátor kmital s frekvenciou, ktorú Bob predpovedal.

- B.5** Pri akom polomere R vesmírnej stanice uhlová frekvencia kmitov na stanici ω bude rovnaká ako kruhová frekvencia $\tilde{\omega}_E$ na zemskom povrchu? Váš výsledok vyjadrite pomocou R_E . 0.3pt

Rozčúlená Alica, Bobovou tvrdohlavosťou, prichádza s ďalším nápadom ako dokázať svoju pravdu. Vyšplhá sa na vežu s výškou H nad podlahou vesmírnej stanice a pustí dole teleso. Tento experiment možno skúmať v rotujúcej vzťažnej sústave aj v inerciálnej vzťažnej sústave.

V rovnomerne rotujúcej vzťažnej sústave kozmonaut pociťuje zotrvačnú silu \vec{F}_C , nazývanú Coriolisova sila. Coriolisova sila pôsobiaca na teleso s hmotnosťou m , ktoré sa pohybuje rýchlosťou \vec{v} v rotujúcej vzťažnej sústave s konštantnou uhlovou rýchlosťou $\vec{\omega}_{ss}$ je daná vzťahom

$$\vec{F}_C = 2m\vec{v} \times \vec{\omega}_{ss} . \quad (2)$$

Pre jej veľkosť platí

$$F_C = 2m\omega_{ss} v \sin \phi , \quad (3)$$

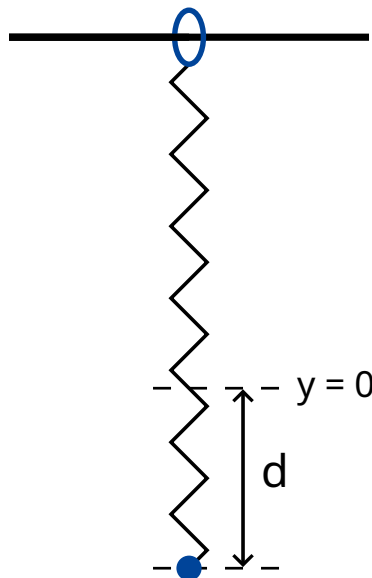
kde ϕ je uhol, ktorý zvierá vektor rýchlosti telesa s osou otáčania. Sila je kolmá jednak na vektor rýchlosti v ako aj na os otáčania. Smer vektora sily môžete určiť pravidlom pravej ruky, avšak jej smer v nasledujúcich úlohách si môžete zvoliť ľubovoľne .

- B.6** Určte horizontálnu rýchlosť v_x a horizontálne posunutie d_x (vzhľadom na základňu veže v smere kolmom na vežu) telieska v okamihu tesne pred dopadom na základňu. Predpokladajte, že výška H veže je malá, takže zrýchlenie, ako bolo namerané kozmonautmi, je počas pádu konštantné. Tiež predpokladajte, že $d_x \ll H$. 1.1pt

Alica, aby dosiahla dobrý výsledok, sa rozhodla zopakovať tento experiment z oveľa vyššej veže ako predtým. Bola prekvapená výsledkom, teleso dopadlo na podlahu vesmírnej stanice pri päte veže, teda $d = 0$.

- B.7** Určte dolnú hranicu výšky veže, pre ktorú môže nastať $d_x = 0$. 1.3pt

Alica je ochotná uskutočniť posledný pokus, aby presvedčil Boba. Chce použiť pružinový oscilátor, aby na ňom ukázala vplyv Coriolisovej sily. Zmení však pôvodnú zostavu experimentu. Pripevní pružinu na krúžok, ktorý sa môže voľne kĺzať po vodorovnej tyči v smere osi x bez trenia. Teliesko na pružine kmitá v smere osi y . Tyč je rovnobežná s podlahou a kolmá na os rotácie vesmírnej stanice. Rovina xy je tak kolmá na os rotácie, pričom os y smeruje priamo do stredu rotácie vesmírnej stanice.



Obrázok 5: Zostava

- B.8** Alica vychýli teliesko o vzdialenosť d smerom dole z rovnovážnej polohy $x = 0$, $y = 0$, a pustí ho (pozri obr. 5). 1.7pt
- Odvodte vzťahy pre $x(t)$ a $y(t)$. Predpokladajte, že $\omega_{ss}d$ je malé a zanedbajte Coriolisovu silu pre pohyb v smere osi y .
 - Zostrojte trajektórie $(x(t), y(t))$, pričom vyznačte všetky dôležité prejavy, ako napr. amplitúda.

Alice a Bob sa hádajú ďalej.