Dve mehanski nalogi (10 točk)

Preden se lotiš reševanja naloge preberi Splošna navodila.

Del A. Skriti kovinski disk (3.5 točk)

Obravnavamo tog lesen valj s polmerom r_1 in višino h_1. Nekje znotraj lesenega valja je kovinski disk s polmerom r_2 in višino h_2. Simetrijski osi diska B in valja S sta vzporedni. Disk je v valju postavljen simetrično, da je enako oddaljen od obeh osnovnih ploskev lesenega valja. Razdaljo med simetrijskima osema B in S označimo z d. Gostota lesa je ρ_1, gostota kovine je $\rho_2 > \rho_1$. Skupna masa sistema valja z diskom je M.

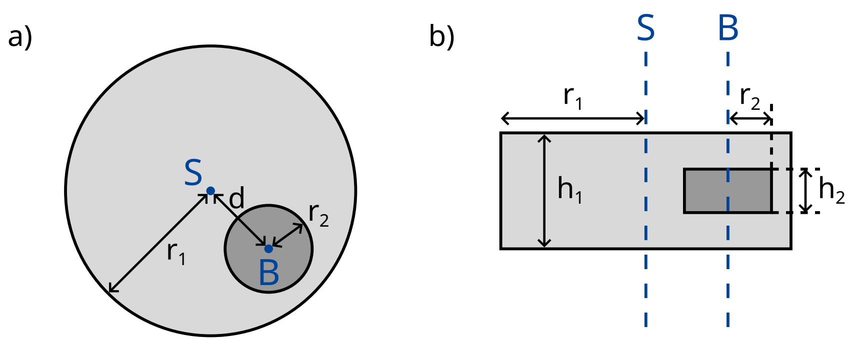
V nalogi postavimo lesen valj na tla tako, da se lahko prosto kotali levo-desno. Slika 1 kaže pogled na valj z diskom s strani in z vrha.

Cilj naloge je določiti velikost in lego kovinskega diska.

V nadaljevanju privzemi, da poznaš parametre

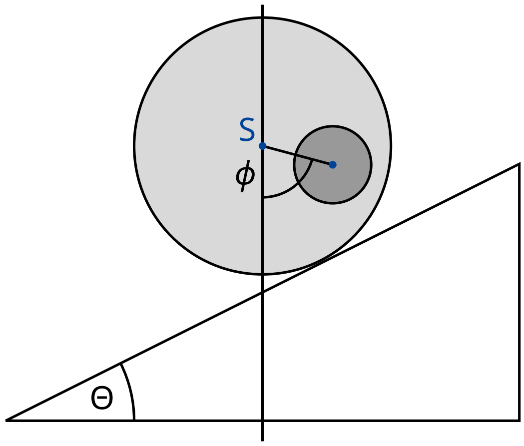
$$r_1,\ h_1,\ \rho_1,\ \rho_2, M\,. \tag{1}$$

Cilj naloge je torej določiti r_2, h_2 in d s posrednimi meritvami.



Slika 1: a) pogled na valj z diskom s strani b) pogled na valj z diskom z vrha.

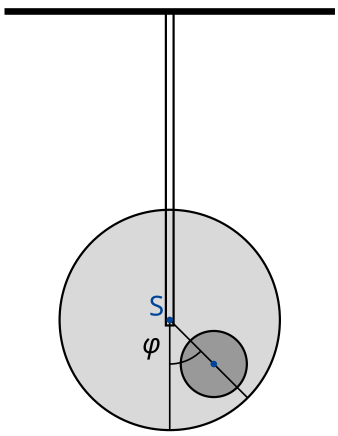
Z b označimo razdaljo med težiščem sistema C in simetrijsko osjo lesenega valja S. Da bi določili razdaljo b, si zamislimo naslednji poskus. Valj postavimo na vodoravno podlago tako, da je v stabilni legi. Potem podlago počasi nagnemo za kot Θ (glej sliko 2). Lepenje je dovolj veliko, da se lahko valj ves čas kotali brez podrsavanja. Valj se po nagnjeni podlagi zakotali malo navzdol in se čez čas umiri v novi stabilni legi. Pri tem se glede na prvotno lego zavrti za kot ϕ.



Slika 2: Valj na nagnjeni podlagi.

A.1	Izrazi in zapiši razdaljo b z znanimi parametri (1), s kotom ϕ in s kotom naklona podlage Θ.	0.8pt

Od tu dalje privzemi, da poznaš razdaljo b.



Slika 3: Na simetrijsko os vrtljivo vpet valj.

Zdaj želimo izmeriti vztrajnostni moment I_S sistema okoli simetrijske osi valja S. Zato valj vrtljivo vpnemo na simetrijsko os S. Nato valj zavrtimo iz ravnovesne lege za majhen kot φ in ga spustimo (glej postavitev na sliki 3). Ugotovimo, da se kot φ periodično spreminja z nihajnim časom T.

A.2	Poišči enačbo gibanja za φ. Izrazi vztrajnostni moment I_S sistema okoli simetrijske osi valja S s T, b in znanimi parametri (1). Privzemi, da valj samo malo zasukamo in je kot φ vedno zelo majhen.	0.5pt

Iz meritev pri vprašanjih **A.1** in **A.2** želimo določiti geometrijo in lego kovinskega diska v lesenem valju.

A.3	Izrazi in zapiši razdaljo d z b in znanimi parametri (1). V izrazu lahko uporabiš tudi r_2 in h_2, ker ju boš izračunal pri vprašanju **A.5**.	0.4pt

A.4	Izrazi in zapiši vztrajnostni moment I_S z b in znanimi parametri (1). V izrazu lahko uporabiš tudi r_2 in h_2, ker ju boš izračunal pri vprašanju **A.5**.	0.7pt

A.5	Iz vseh izrazov, ki si jih izpeljal do sedaj, izrazi h_2 in r_2 z b, T in znanimi parametri (1). Višino h_2 lahko izraziš tudi z r_2, če se ti zdi zato izraz preglednejši.	1.1pt

Del B. Vrteča se vesoljska postaja (6.5 točk)

Jernej je astronavt, ki živi na vesoljski postaji *Zlato srce*. Postaja je oblikovana kot velikansko kolo s polmerom R, ki se vrti okoli svoje simetrijske osi in tako ustvarja umetno težnost. Astronavti živijo na notranji strani roba kolesa. Zanemari gravitacijsko silo zaradi mase postaje in ukrivljenost tal na postaji.

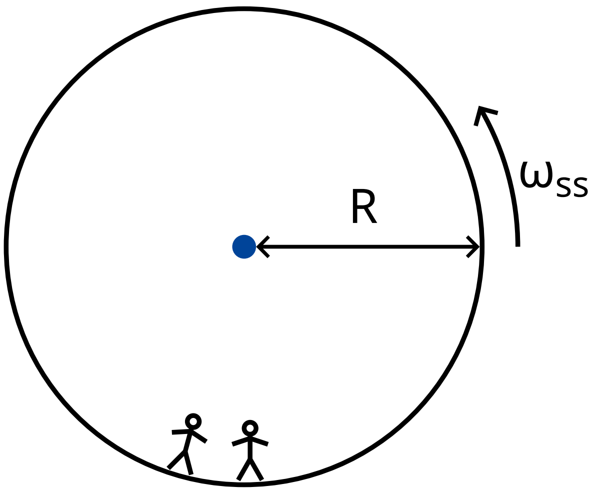
B.1	S kolikšno kotno hitrostjo ω_{ss} se vrti vesoljska postaja, da astronavti čutijo enak pospešek g_{E} kot na površju Zemlje?	0.5pt

Jernej in njegov prijatelj astronavt Aleksej se prepirata. Aleksej ne verjame, da zares živijo na vrteči se vesoljski postaji, ampak trdi, da so na Zemlji. Jernej želi Alekseju dokazati, da živijo na vesoljski postaji s fizikalnimi argumenti. Zato pritrdi utež z maso m na vzmet s konstanto vzmeti k in utež spusti, da nihalo zaniha. Poskus izvede tako, da se utež giblje samo v navpični smeri in se ne more gibati v vodoravni smeri.

B.2	Predpostavi, da je težni pospešek na Zemlji g_{E} konstanten. S kolikšno krožno frekvenco ω_{E} niha vzmetno nihalo na Zemlji?	0.2pt

B.3	Kolikšno krožno frekvenco ω istega nihala izmeri Jernej na vesoljski postaji?	0.6pt

Jernej je prepričan, da njegov poskus dokazuje, da so na vrteči se vesoljski postaji. Aleksej pa je še naprej v dvomih in trdi, da ima podoben vpliv na frekvenco nihala tudi spreminjanje gravitacijskega privlaka na utež med nihanjem zaradi spreminjanja oddaljenosti uteži od površja Zemlje. V nadaljevanju raziskujemo, ali ima Aleksej prav.



Slika 4: Vesoljska postaja *Zlato srce*.

B.4	Izpelji izraz za težni pospešek $g_E(h)$ za majhne višine h nad površjem Zemlje in izračunaj krožno frekvenco $\tilde{\omega}_E$ vzmetnega nihala, ki upošteva izpeljano spremi-njanje težnega pospeška z višino (linearni približek zadošča). Polmer Zemlje označi z R_E. Vrtenje Zemlje zanemari.	0.8pt

In res, Jernej ugotovi, da vzmetno nihalo na njihovi vesoljski postaji niha prav s frekvenco, ki jo napove Aleksej.

B.5	Pri kolikšnem polmeru vesoljske postaje R je krožna frekvenca ω enaka krožni frekvenci $\tilde{\omega}_E$ na Zemlji? Rezultat izrazi z R_E.	0.3pt

Ogorčen zaradi Aleksejeve trmoglavosti se Jernej domisli poskusa, s katerim bi lahko dokazal svoj prav. Jernej se vzpne na stolp z višino H nad tlemi vesoljske postaje in z njega spusti telo, pa prosto pade na tla postaje. Ta poskus lahko obravnavaš v enakomerno vrtečem se sistemu postaje ali v inercialnem sistemu.

V enakomerno vrtečem se sistemu lahko opišemo pojave z vpeljavo sistemske Coriolisove sile $\vec{F}_C$. Sila $\vec{F}_C$, ki deluje na telo z maso m, ki se giblje s hitrostjo $\vec{v}$ v sistemu, ki se vrti s stalno kotno hitrostjo $\vec{\omega}_{ss}$, je

$$\vec{F}_C = 2m\vec{v} \times \vec{\omega}_{ss} \,. \tag{2}$$

Uporabi skalarni izraz za silo

$$F_C = 2m\,v\,\omega_{ss} \sin\phi \,, \tag{3}$$

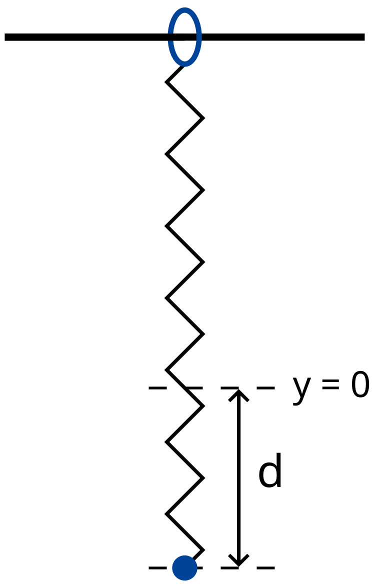
kjer je ϕ kot med hitrostjo telesa $\vec{v}$ in osjo vrtenja sistema. Sila je pravokotna na oboje, na hitrost in os vrtenja. Predznak sile lahko poiščeš s pravilom desne roke, a v nadaljevanju ga lahko izbereš poljubno.

B.6	Izračunaj vodoravno hitrost v_x in vodoravno razdaljo d_x (od vznožja stolpa) telesa v trenutku tik preden pade na tla postaje. Predpostavi, da je višina stolpa H majhna in je zato navpični pospešek telesa med padanjem stalen. Upoštevaj, da velja $d_x \ll H$.	1.1pt

Da bi dobil dober rezultat, se Jernej odloči, da telo spusti z veliko višjega stolpa kot prej. Presenečen ugotovi, da telo pade na tla postaje pri vznožju stolpa in je $d_x = 0$.

B.7	Poišči najmanjšo višino stolpa, za katero se lahko zgodi, da je $d_x = 0$.	1.3pt

Jernej poskusi še zadnjič prepričati Alekseja. Vpliv Coriolisove sile prikaže na svojem vzmetnem nihalu, za kar nekoliko spremeni začetno postavitev. Zgornje krajišče vzmeti obesi na obroč, ki lahko brez trenja drsi v smeri osi x po vodoravni palici. Vzmet niha v navpični smeri (vzdolž osi y). Vodoravna palica je vzporedna tlem postaje in pravokotna na os vrtenja vesoljske postaje (ki je vzdolž osi z). Os y kaže v smeri od tal postaje proti središču vrtenja.



Slika 5. Postavitev nihala.

B.8	Jernej potegne utež za d (od ravnovesne lege pri $x = 0$, $y = 0$) proti tlom postaje, in jo spusti (glej sliko 5). • Podaj algebrajska izraza za $x(t)$ in $y(t)$. Predpostavi, da je produkt $\omega_{ss} d$ majhen. Zanemari vpliv Coriolisove sile na gibanje vzdolž osi y. • Skiciraj tirnico $(x(t), y(t))$ in na njej označi vse pomembne parametre, npr. amplitudo.	1.7pt

Jernej in Aleksej nista prepričala drug drugega ...

Naveličani so ju bili tudi ostali člani posadke Tomaž, Luka in Jakob.