Två problem i mekanik (10 poäng)

Läs de allmänna anvisningarna i det separata kuvertet innan du börjar.

Del A. Den dolda skivan (3,5 poäng)

Vi betraktar en solid träcylinder med radie r_1 och tjocklek h_1. Någonstans inuti träcylindern finns en cirkulär metallskiva med radie r_2 och tjocklek h_2. Metallskivan är placerad så att dess symmetriaxel B är parallell med träcylinderns symmetriaxel S , och har samma avstånd till cylinderns båda plana ytor. Vi betecknar avståndet mellan S och B med d. Träets densitet är ρ_1, och metallens $\rho_2 > \rho_1$. Den totala massan för träcylindern med metallskivan inuti är M.

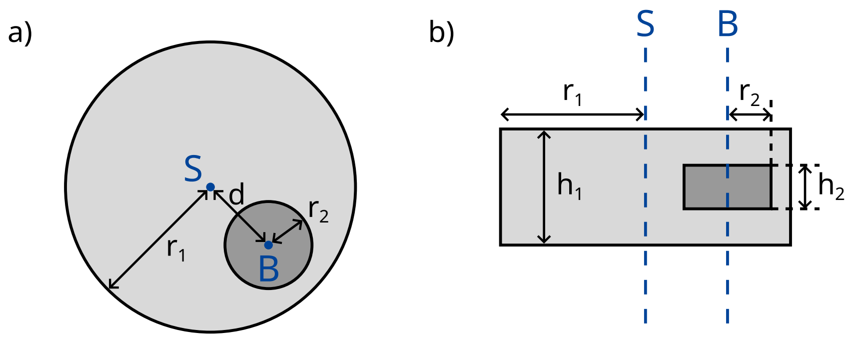
I denna uppgift placeras träcylindern på ett plant underlag så att den fritt kan rulla åt vänster eller höger. Se Fig. 1 för en bild av uppställningen sedd från sidan respektive uppifrån.

Målet i denna uppgift är att bestämma metallskivans storlek och position.

När du nedan ombeds uttrycka resultat i kända storheter, kan du alltid betrakta följande storheter som kända:

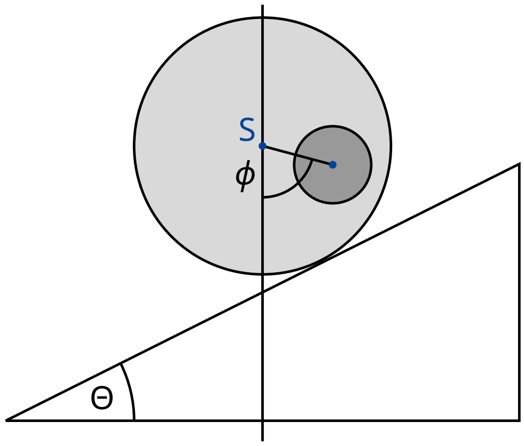
$$r_1,\ h_1,\ \rho_1,\ \rho_2, M\ . \tag{1}$$

Målet är att teoretiskt bestämma r_2, h_2 och d med hjälp av indirekta mätningar.



Figur 1: a) Vy från sidan, b) vy uppifrån.

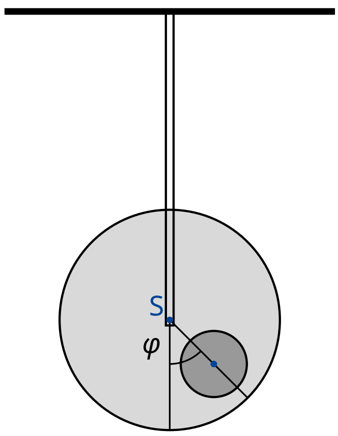
Vi betecknar avståndet mellan hela systemets tyngdpunkt C och träcylinderns symmetriaxel S med b. För att bestämma detta avstånd, tänker vi oss följande experiment: vi placerar träcylindern på ett plant, vågrätt underlag, på ett sådant sätt att den är i stabil jämvikt. Därefter ändrar vi långsamt underlagets lutning till en vinkel Θ (se Fig. 2). Statisk friktion gör att träcylindern kan rulla fritt utan att glida. Lutningen gör att den rullar ned en bit till en ny jämviktsposition, definierad av en vinkel ϕ, som vi mäter.



Figur 2: Cylinder på lutande underlag.

A.1	Ange ett uttryck för b som funktion av storheterna (1), vinkeln ϕ, och underlagets lutningsvinkel Θ.	0.8pt

I det följande kan värdet på b betraktas som känt.



Figur 3: Upphängd system.

Härnäst vill vi mäta systemets tröghetsmoment $I_S$med avseende på cylinderns symmetriaxel S. Vi hänger därför upp cylindern i symmetriaxeln S i en stabil stång. Därefter roterar vi den en liten vinkel φ från dess jämviktsläge och släpper den. Se figur 3 för uppställningen. Vi finner då att φ beskriver en periodisk rörelse med period T.

A.2	Ange (rörelse)ekvationen som beskriver φ. Uttryck systemets tröghetsmoment I_S kring cylinderns symmetriaxel S i termer av T, b och de kända storheterna (1). Du kan anta att vi bara stör systemet lite från dess jämviktsposition, så att värdet på φ alltid är mycket litet.	0.5pt

Med hjälp av mätningarna i **A.1** och **A.2** vill vi nu bestämma metallskivans geometri och dess position inuti träcylindern.

A.3	Ange ett uttryck för avståndet d som funktion av b och storheterna (1). Du får även använda r_2 och h_2 som variabler i ditt uttryck, då dessa kommer att beräknas i deluppgift **A.5**.	0.4pt

A.4	Ange ett uttryck för tröghetsmomentet I_S i termer av b och de kända storheterna (1). Du får även använda r_2 och h_2 som variabler i ditt uttryck, då dessa kommer att beräknas i deluppgift **A.5**.	0.7pt

A.5	Använd nu alla dina tidigare resultat för att ge ett uttryck för h_2 and r_2 i termer av b, T och de kända storheterna (1). Du får uttrycka h_2 som funktion av r_2.	1.1pt

Del B. Roterande rymdstation (6,5 poäng)

Alice är astronaut och bor på en rymdstation. Denna utgörs av ett jättestort hjul med radie R som roterar kring sin axel, och den förser därmed astronauterna med en konstgjord gravitation. Astronauterna vistas på insidan av hjulets ytterkant. Rymdstationens egna gravitation och golvets krökning kan försummas.

B.1	Med vilken vinkelhastighet ω_{ss} måste rymdstationen rotera, om astronauterna ska uppleva samma gravitation g_E som på jordytan?	0.5pt

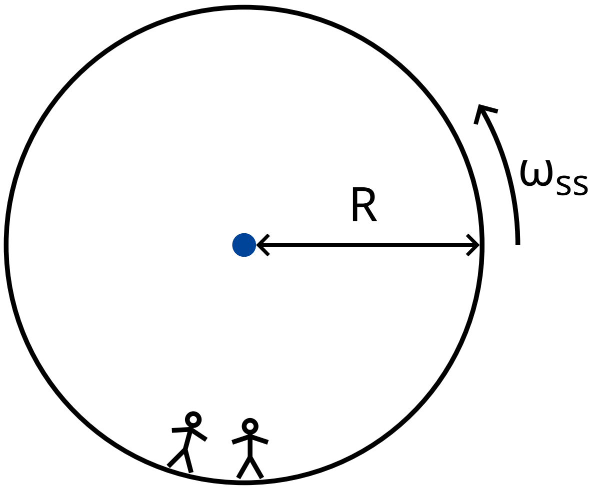
Alice och hennes astronautkollega Bob är oense. Bob tror inte alls att de bor i en rymdstation, utan hävdar att de befinner sig på jorden. Alice vill bevisa för Bob att de befinner sig på en roterande rymdstation med hjälp av fysik. Därför fäster hon en massa, m, i en fjäder med fjäderkonstant k och låter den oscillera. Massan kan röra sig i vertikal riktning men inte horisontellt.

B.2	Anta att gravitationen på jorden är konstant med acceleration g_E. Vilken vinkelfrekvens ω_E för oscillationerna skulle man då uppmäta på jordytan?	0.2pt

B.3	Vilken vinkelfrekvens ω uppmäter Alice för oscillationerna på rymdstationen?	0.6pt

Alice är övertygad om att hennes experiment ska bevisa att de befinner sig på en roterande rymdstation. Bob förblir skeptisk. Han hävdar att om man tar hänsyn till förändringen i tyngdacceleration ovanför jordytan får man en liknande effekt. Har han rätt?

Vi ska nu undersöka om Bob har rätt.



Figur 4: Rymdstation

B.4	Härled ett uttryck för gravitationen $g_E(h)$ för små höjder h över jordytan och beräkna oscillationsfrekvensen $\tilde{\omega}_E$ för massans oscillationer (linjär approximation är tillräckligt). Beteckna jordens radie med R_E. Försumma jordrotationen.	0.8pt

Som väntat finner Alice att fjäderpendeln oscillerar med den frekvens Bob förutsade.

B.5	För vilket värde på rymdstationens radie R överensstämmer oscillationsfrekvensen ω med värdet $\tilde{\omega}_E$ på jorden? Uttryck ditt svar i termer av R_E.	0.3pt

Förtvivlad över Bobs envishet får Alice idén att göra ett experiment för att bevisa sin tes. Därför klättrar hon upp i ett torn med höjd H över rymdstationens golv och släpper en vikt. Detta experiment kan förstås i såväl ett roterande system som i ett fast system.

I ett likformigt roterande referenssystem upplever astronauterna en fiktiv kraft $\vec{F}_C$ kallad Corioliskraft. Den verkar på ett objekt med massan m som rör sig med hastigheten $\vec{v}$ i ett koordinatsystem som roterar med konstant vinkelhastighet $\vec{\omega}_{ss}$ och ges av

$$\vec{F}_C = 2m\vec{v} \times \vec{\omega}_{ss} \, . \tag{2}$$

Uttryckt i skalära storheter kan du använda

$$F_C = 2mv\omega_{ss} \sin\phi \, , \tag{3}$$

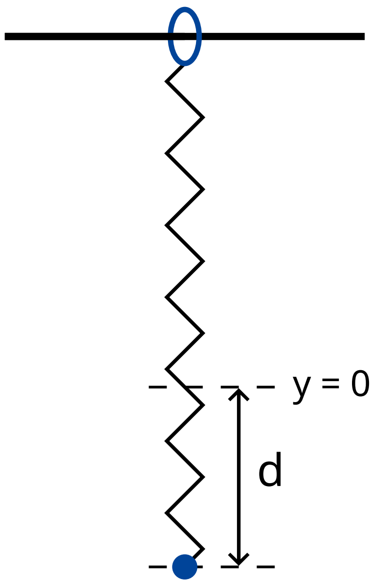
där ϕ är vinkeln mellan hastigheten och rotationsaxeln. Kraften är vinkelrät både mot hastigheten v och rotationsaxeln. Kraftens tecken kan bestämmas från högerhandsregeln (skruvregeln), men i det följande kan du välja den fritt.

B.6	Beräkna den horisontella hastigheten v_x och den horisontella förflyttningen d_x (relativt tornets bas i en vinkelrät riktning från tornet) i det ögonblick massan landar på golvet. Du kan anta att tornets höjd H är så liten att accelerationen astronauterna mäter är konstant under fallet. Du kan också anta att $d_x \ll H$.	1.1pt

För att få ett bra resultat beslutar Alice att utföra detta experiment från ett mycket högre torn än tidigare. Till hennes förvåning landar vikten på golvet vid tornets bas, så att $d = 0$.

B.7	Beräkna den minsta höjd tornet kan ha för att $d_x = 0$.	1.3pt

Alice är beredd att göra ett sista försök att övertyga Bob. Hon vill använda sin fjäderpendel för att påvisa effekten från Coriolis-kraften. Hon ändrar därför på den ursprungliga uppställningen: hon fäster sin fjäder i en ring som fritt kan glida längs en vågrät stång i x-riktningen utan friktion. Själva fjädern oscillerar i y-riktningen. Stången är parallell med golvet och vinkelrät mot rymdstationens rotationsaxel. xy-planet är därmed vinkelrätt mot rotationsaxeln, med y-axeln riktad rakt mot stationens centrum.



Figur 4: Uppställning.

B.8 Alice drar ned massan en sträcka d från jämviktsläget $x = 0$, $y = 0$, och släpper den sedan (se figur 5). 1.7pt

- Ge ett algebraiskt uttryck för $x(t)$ och $y(t)$. Du kan anta att $\omega_{ss} d$ är litet. Försumma Corioliskraften för rörelse längs *y*-axeln.
- Skissa massans bana $(x(t), y(t))$, och markera alla dess viktigaste egenskaper (amplitud etc.) i grafen.

Alice och Bob fortsätter sin diskussion.