# مسألتان في الميكانيك (10 درجات)

يرجى قراءة التعليمات العامة في الظرف المنفصل قبل أن تبدأ الحل.

## الجزء A. القرص المخفي ( 3.5 درجة)

ندرس أسطوانة خشبية صلبة نصف قطرها $r_1$ وثخانتها $w_1$ . تمّ استبدال جزء من داخل جسم الأسطوانة الخشبية بقرص معدني مخفي (أي حل المعدن محل نفس حجمه من الخشب المزال) نصف قطر القرص المعدني $r_2$ وسماكته $h_2$. القرص موضوع بحيث يكون محور $B$ ه موازٍ لمحور الأسطوانة الخشبية $S$ ، وهو يبعد المسافة نفسها عن كل من قاعدتي الأسطوانة الخشبية،. ليكن البعد بين $S$ و $B$ . $d$ لتكن $\rho_1$ الكتلة الحجمية للأسطوانة الخشبية، ولتكن $\rho_2$ الكتلة الحجمية للمعدن ( $\rho_2 > \rho_1$ ). لتكن $M$ الكتلة الكلية لاجتماع الأسطوانة الخشبية والقرص المعدني.

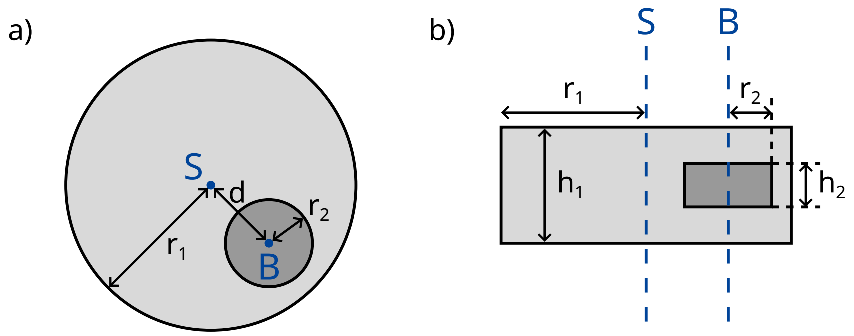
في هذا الجزء نضع الأسطوانة الخشبية على الأرض مما يسمح لها بالدوران بحرية إلى اليمين وإلى اليسار. انظر الشكل 1 حيث نجد منظر جانبي للأسطوانة ومنظر من الأعلى لها.

يهدف هذا الجزء إلى تحديد أبعاد وموقع القرص المعدني.

في الطلبات اللاحقة يُطلب كتابة النتائج بدلالة المقادير المعروفة القيمة. نفترض أنّ المقادير الآتية معروفة القيمة:

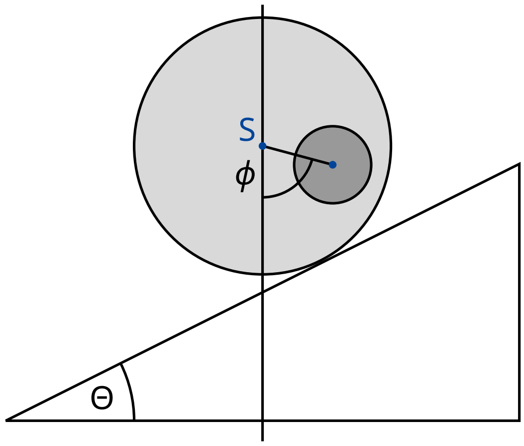
$$r_1,\ h_1,\ \rho_1,\ \rho_2, M\ . \tag{1}$$

نهدف إلى تحديد كل من $r_2$ و $h_2$ و $d$ بقياسات غير مباشرة.




الشكل 1: a) منظر جانبي b) منظر من الأعلى.

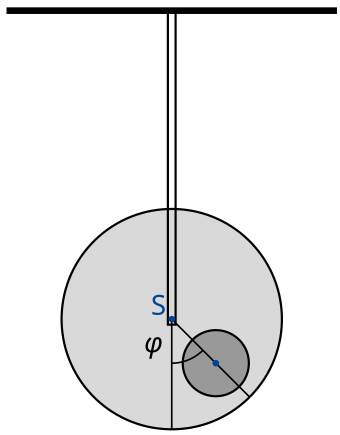
$b$ هو المسافة بين $C$ مركز ثقل الجملة ( أسطوانة خشبية +قرص معدني) ومحور الأسطوانة الخشبية $S$ . لكي نحدد هذا البعد نقوم بالتجربة الآتية: نضع الأسطوانة الخشبية على قاعدة أفقية بحيث تكون متوازنة. ثمّ نقوم بإمالة القاعدة ببطء بزاوية $\Theta$ ( انظر الشكل 2). ونتيجة لوجود احتكاك يمنع الأسطوانة من الانزلاق، يُمكن للأسطوانة الدوران بحرية دون انزلاق . سوف تقوم الأسطوانة الخشبية بالدوران قليلاً هابطة القاعدة المائلة، وتصل الأسطوانة إلى موضع توازن بعد الدوران بزاوية $\phi$. نقوم بقياس هذه الزاوية




الشكل 2: أسطوانة على قاعدة مائلة.

| | | |
|---|---|---|
| **A.1** | أوجد العلاقة التي تُعطي $b$ بدلالة المقادير المعروفة القيمة (1) والزاوية $\phi$ و زاوية إمالةالقاعدة $\Theta$ . | 0.8pt |

ابتداءً من هذا السؤال نفترض أنّ قيمة $b$ معروفة.




الشكل 3: الجملة المعلّقة. نفترض أثناء دوران الأسطوانة أن المحور $S$ يبقى ثابتاً ولا يتحرّك

لاحقاً نريد أن نقيس $I_S$ عزم عطالة الجملة (الأسطوانة مع القرص المعدني داخلها) وذلك بالنسبة للمحور $S$ ، لقيام بذلك نعلّق الأسطوانة من خلال محورها إلى ساق مثبّت، أي أن محور الأسطوانة $S$ يكون ثابتاً ويُمكن للأسطوانة الدوران حول هذا المحور. نقوم بتدوير الأسطوانة عن موقع توازنها بزاوية صغيرة $\varphi$ ، ثُمّ نتركها ( انظر الشكل 3 ) . نجد أنّ الأسطوانة تتحرك حركة اهتزازية تتغيّر فيها $\varphi$ بشكل دوري بدور قدره $T$ .

| | | |
|---|---|---|
| **A.2** | أوجد المعادلة التي تحققها $\varphi$ . اكتب العلاقة التي تُعطي $I_S$ عزم عطالة الأسطوانة (طبعاً مع القرص المعدني داخلها) حول المحور $S$ بدلالة $b$ , و $T$ و المقادير المعروفة االقيمة (1). نفترض أنّ إزاحة الأسطوانة عن موضع التوازن صغيرة مما يسمح باعتبار الزاوية $\varphi$ صغيرة جداً. | 0.5pt |

من القياسات في السؤالين **A.1** و**A.2** نريد أن نحدد الأبعاد الهندسية للقرص المعدني ونحدد موقعها داخل الأسطوانة الخشبية.

| | | |
|---|---|---|
| **A.3** | أوجد العلاقة التي تُعطي البعد $d$ بدلالة $b$ و المقادير (1). يُمكن أيضاً أن تُدخل $r_2$ و $h_2$ كمتحولات في العلاقة بما أنّه سيجري حسابهما قي الطلب الجزئي **A.5** . | 0.4pt |

| | | |
|---|---|---|
| **A.4** | أوجد العلاقة التي تُعطي عزم العطالة $I_S$ بدلالة $b$ والمقادير المعروفة (1). يُمكنك أن تُدخل أيضاً $r_2$ و$h_2$ كمتحولات في العلاقة بما أنه سيجري حسابهما قي الطلب الجزئي **A.5** . | 0.7pt |

| | | |
|---|---|---|
| **A.5** | باستخدام جميع النتائج السابقة، اكتب العلاقة التي تُعطي $r_2$ والعلاقة التي تُعطي $h_2$ بدلالة $T$ والمقادير المعروفة (1). يُمكنك أن تكتب $h_2$بدلالة $r_2$ . | 1.1pt |

## الجزء .B المحطة الفضائية التي تدور (6.5 درجة)

تعمل أليس كرائدة فضاء وهي تعيش في محطة فضائية. للمحطة الفضائية شكل دولاب هائل الحجم نصف قطره $R$ يدور حول محوره. يمارس رواد الفضاء حياتهم على السطح الداخلي من الجزء المحيطي من الدولاب. يسمح الدوران بخلق جاذبية اصطناعية يشعر بها رواد الفضاء داخل المحطة. كتلة المحطة صغيرة نسبياً مما يسمح لنا بإهمال التجاذب الكتلي بين المحطة ورواد الفضاء ونتجاهل تقوّس أرض المحطة.

| | | |
|---|---|---|
| **B.1** | ما السرعة الزاوية $\omega_{ss}$ لدوران المحطة حول نفسها ( حول محور الدولاب والتي تسمح لرواد الفضاء بالشعور بوجود قوة مطبقة عليهم تكافئ ما يشعرون به بوجود تسارع جاذبية قدره $g_E$ كما هو حال تسارع الجاذبية على سطح الأرض. | 0.5pt |

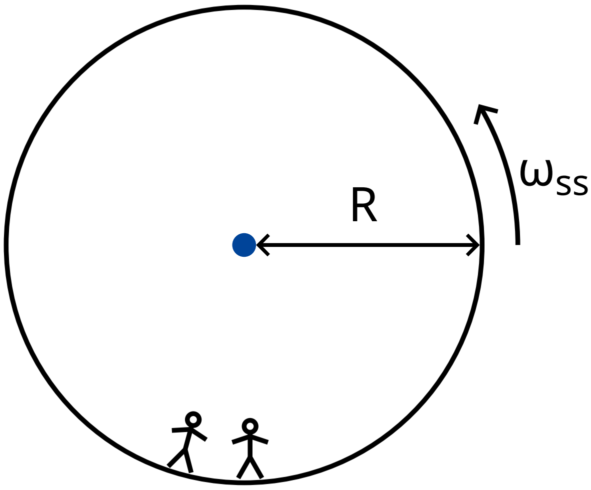
أليس و صديقها رائد الفضاء بوب مختلفان في الرأي: لا يعتقد بوب أنهما في محطة فضاء ويقول إنّهما موجودان على سطح الأرض. تريد أليس إقناع بوب بطريقة فيزيائية أنّهما يعيشان في المحطة الفضائية الدائرة. للقيام بذلك تقوم أليس بربط كتلة $m$ بنابض ثابت صلابته $k$ وتتركه يهتز. تقوم الكتلة بالاهتزاز شقولياً ( وفق محور الدولاب) فقط ولا تهتز جانبياً.

| | | |
|---|---|---|
| **B.2** | نفترض أنّ جاذبية الأرض ثابتة ويساوي تسارعها $g_E$ . اكتب العلاقة التي تُعطي $\omega_E$ نبض اهتزاز النابض الذي يقيسه رجل على سطح الأرض  نسمي النبض أيضاً التواتر الزاوي للاهتزاز | 0.2pt |

| | | |
|---|---|---|
| **B.3** | أوجد العلاقة التي تُعطي نبض اهتزاز النابض $\omega$ في المحطة الفضائية. | 0.6pt |

أليس مقتنعة بأنّ تجربتها السابقة تُثبت أنّهما في محطة فضائية تدور حول نفسها. ولكن بوب بقي مشككاً بذلك. وهو يقول إذا أخذنا بعين الاعتبار تغيّر الجاذبية فوق سطح الأرض سوف نجد آثار مشابهة لتلك التي نراها في التجربة التي تُجرى داخل المحطة.

سوف نستكشف فيما يلي إن كان بوب محقاً




الشكل 4: المحطة الفضائية

| | | |
|---|---|---|
| **B.4** | ليكن $R_E$ نصف قطر الأرض، ليكن $h$ الارتفاع في نقطة فوق سطح الأرض، نفترض هذا الارتفاع صغير مقارنة بنصف قطر الأرض. استنتج العلاقة التي تُعطي تسارع الجاذبية $g_E(h)$ عندما تبتعد النقطة المدروسة بمقدار $h$ عن سطح الأرض. ثُمّ استنتج نبض اهتزاز النابض عند سطح الأرض ( نكتفي بالتقريب الخطي). نهمل أثر دوران الأرض حول نفسها. | 0.8pt |

بالفعل، بالنسبة للمركبة الفضائية وجدت أليس أنّ النابض بالفعل يهتز بالنبض الذي توقعه بوب.

| | | |
|---|---|---|
| **B.5** | ما هو نصف قطر المحطة الفضائية $R$ الذي من أجله يكون نبض اهتزاز النابض $\omega$ فيها (بجوار السطح الداخلي المحيط للدولاب) مساوياً نبض اهتزاز النابض إذا جرى بجوار سطح الأرض؟ اكتب إجابتك بدلالة $R_E$ . | 0.3pt |

مستاءة من عناد بوب، أتت لأليس فكرة إجراء تجربة لإثبات وجهة نظرها. لتحقيق ذلك صعدت إلى قمة برج ارتفاعه $H$ فوق أرض المحطة الفضائية وقامت بإلقاء كتلة. يُمكن فهم هذه التجربة من خلال العمل في جملة مرجعية دائرة. حيث أنّ الجسم المتحرّك داخل جملة دائرة يخضع لقوّة $\vec{F}_C$ تسمى قوّة كوريوليس. كما يُمكن فهمها في جملة عطالية.

في الجمل التي تدور بسرعة زاوية منتظمة تظهر قوّة كوريوليس. تُعطى قوة كوريوليس $\vec{F}_C$ التي تؤثّر على جسم كتلته $m$ يتحرّك بسرعة $\vec{v}$ داخل جملة تدور بسرعة زاوية ثابتة شعاعها $\vec{\omega}_{ss}$ ينطبق على محور الدوران ويتجه باتجاه الإبهام عند توجيه الأصابع بجهة الدوران تُعطى هذه القوة بالعلاقة:

$$\vec{F}_C = 2m\vec{v} \times \vec{\omega}_{ss} \,. \tag{2}$$

يُمكن استخدام العلاقة السلّمية:

$$F_C = 2mv\omega_{ss} \sin\phi \,, \tag{3}$$

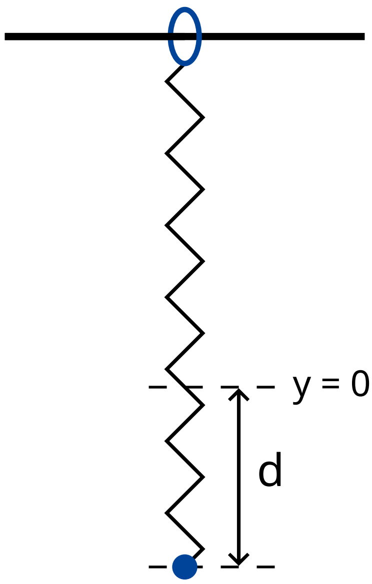
حيث $\phi$ هي الزاوية بين شعاع السرعة ومحور دوران الجملة. وتكون قوّة كوريوليس عمودية على كل من شعاع السرعة $v$ ومحور الدوران. يُمكن تحديد اتجاه القوة من قاعدة اليد اليمنى، ولكن فيما يلي يُكنك اختيارها بحرية.

| | | |
|---|---|---|
| **B.6** | احسب السرعة الأفقية $v_x$ والانزياح العمودي $d_x$(بالنسبة لقاعدة البرج، في الاتجاه العمودي على البرج) للكتلة الساقطة وذلك لحظة اصطدامها بأرض المحطة. نفترض أنّ ارتفاع البرج $H$ صغير بما يكفي لإهمال تغيّر تسارع السقوط الشاقولي للجسم الساقط. يُمكن أيضاً أن نفترض $H \ll d_x$ . | 1.1pt |

للحصول على نتيجة جيدة، قررت أليس أن تقوم بالتجربة من برج أعلى بكثير من السابق. ولكن تفاجأت بأنّ الكتلة صدمت الأرض في قاعدة البرج دون أي انزياح أي مع $d_x = 0$

| | | |
|---|---|---|
| **B.7** | أوجد أصغر ارتفاع للبرج نجد من أجله $d_x = 0$. | 1.3pt |

كانت أليس مستعدة لجهد أخير لإقناع بوب. أرادت استخدام نابض مهتز لثري فعل كوريوليس. لتحقيق ذلك غيرت بنية التجربة الأصلية: قامت بتعليق النابض بواسطة حلقة يُمكنها الانزلاق بحرية دون احتكاك على ساق أفقي في الاتجاه $x$، تهتز الكتلة المعلقة بالنابض في الاتجاه $y$ . الساق توازي أرض المحطة وتعامد محور دوران الدولاب ( المحطة الفضائية). إذن المستوي $xy$ يعامد محور دوران المحطة، و $y$ يتجه إلى مركز الدوران.




الشكل 5: مخطط التجربة

| | | |
|---|---|---|
| **B.8** | تقوم أليس بشد الكتلة بمقدار $d$ إلى الأسفل انطلاقاً من وضع التوازن عند $x = 0$ و $y = 0$ ، وتتركه (الشكل5)<br>• استنتج العلاقة التي تُعطي $x(t)$ والعلاقة التي تعطي $y(t)$ . يُمكنك افتراض $\omega_{ss} d$ صغيراً. و اهمل قوة كوريوليس وفق المحور $y$ .<br>• قم برسم مسار الكتلة في المستوي (x,y) موضحاً على الرسم الخصائص مثل القيم الحدية. | 1.7pt |

تستمر أليس وبوب بالنقاش.