

สองโจทย์ปัญหาทางกลศาสตร์ (10 คะแนน)

กรุณาอ่านข้อแนะนำทั่วไปที่อยู่ในซองซึ่งแยกไว้ต่างหากก่อนเริ่มทำข้อสอบ

ข้อ A. แผ่นกลมที่ซ่อนอยู่ (3.5 คะแนน)

เราพิจารณาทรงกระบอกไม้ตันรัศมี r_1 และหนา h_1 ณ ตำแหน่งหนึ่งภายในทรงกระบอกไม้นี้ ไม่ได้ถูกแทนที่ด้วยแผ่นกลมโลหะรัศมี r_2 และหนา h_2 แผ่นกลมโลหะนี้ถูกฝังอยู่โดยที่แกนสมมาตร B ของแผ่นกลมโลหะขนานกับแกนสมมาตร S ของทรงกระบอกไม้และระยะห่างระหว่างแผ่นกลมโลหะกับฝาบนและฝาล่างของทรงกระบอกไม้มีค่าเท่ากัน เราให้ d แทนระยะห่างระหว่างแกน S กับแกน B ความหนาแน่นของไม้มีค่า ρ_1 ความหนาแน่นของโลหะมีค่า $\rho_2 > \rho_1$ มวลรวมของทรงกระบอกไม้และแผ่นกลมโลหะด้านในมีค่า M

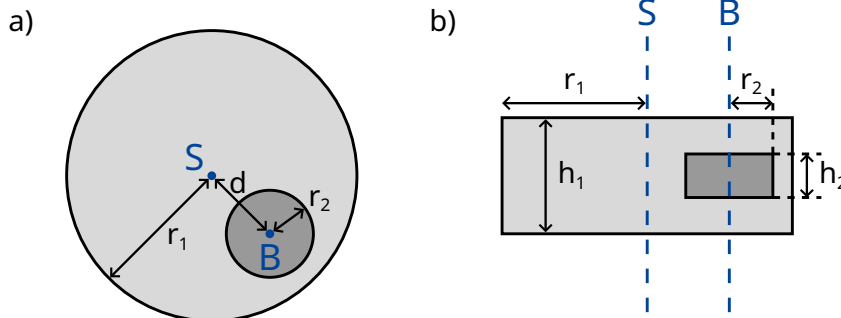
ในข้อนี้เราวางทรงกระบอกไม้บนพื้นซึ่งทำให้ทรงกระบอกสามารถกลิ้งไปทางซ้ายและขวาได้อย่างอิสระ ให้ดูรูปที่ 1 สำหรับมุมมองจากด้านข้างและจากด้านบนของระบบนี้

เป้าหมายของข้อนี้คือเพื่อคำนวณหาขนาดและตำแหน่งของแผ่นกลมโลหะ

ต่อจากนี้ เมื่อถูกถามให้แสดงคำตอบในรูปแบบตัวแปรที่ทราบค่า ให้นักเรียนสมมติว่าตัวแปรต่อไปนี้ไปตัวแปรที่ทราบค่า

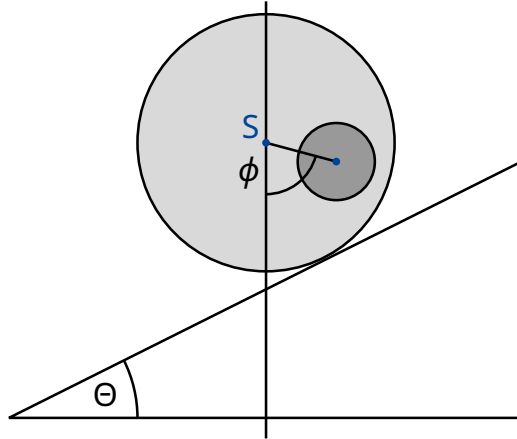
$$r_1, h_1, \rho_1, \rho_2, M. \quad (1)$$

เป้าหมายของเราคือจะคำนวณหา r_2, h_2 และ d ด้วยการวัดทางอ้อม



รูปที่ 1 เมื่อวางทรงกระบอกบนแนวราบ a) มุมมองจากด้านข้างเมื่อมองขนานกับแกนสมมาตร b) มุมมองจากด้านบน

ให้ b เป็นระยะห่างระหว่างจุดศูนย์กลางมวล C ของระบบทั้งหมดกับแกนสมมาตร S ของทรงกระบอกไม้ เพื่อที่จะคำนวณหาระยะห่างดังกล่าวเราออกแบบการทดลองดังนี้: เราวางทรงกระบอกไม้บนฐานที่วางอยู่ในแนวนอนโดยที่ทรงกระบอกอยู่ในสมดุลที่เสถียร จากนั้นค่อยๆยกฐานด้านหนึ่งขึ้นอย่างช้าๆไปเป็นมุม Θ (ดูรูปที่ 2) ผลจากความเสียดทานสถิตทำให้ทรงกระบอกไม้ไถลแต่สามารถกลิ้งได้อย่างอิสระ ทรงกระบอกไม้จะกลิ้งลงพื้นเอียงไปเล็กน้อย แต่หลังจากนั้นจะหยุดนิ่งในตำแหน่งสมดุลที่เสถียรหลังจากหมุนไปเป็นมุม ϕ ซึ่งเราวัดค่าได้

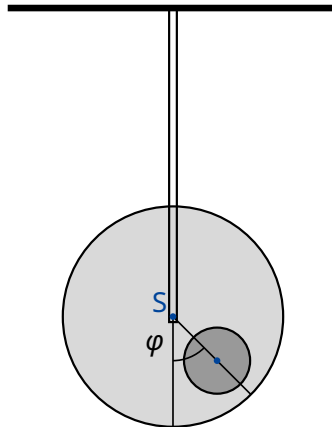


รูปที่ 2: ทรงกระบอกบนฐานเอียง

A.1 จงหาค่า b ในรูปของมุม ϕ , มุมเอียง θ ของฐาน และปริมาณต่างๆในสมการ (1)

0.8pt

ต่อจากนี้เราสามารถสมมติได้ว่า b เป็นปริมาณที่ทราบค่า



รูปที่ 3: ระบบที่ถูกแขวนอยู่

ต่อไปนี้จะหาโมเมนต์ความเฉื่อย I_S ของระบบรอบแกนสมมาตร S ด้วยการแขวนทรงกระบอกไม้ที่แกนสมมาตรไว้กับก้านแข็งเกร็งที่อยู่กับที่ จากนั้นหมุนมันออกจากสมดุลด้วยมุมเล็กๆ φ แล้วปล่อยให้รูปที่ 3 ประกอบ เราพบว่าตัวแปร φ อธิบายการเคลื่อนที่แบบเป็นคาบด้วยคาบการแกว่ง T

A.2 จงหาสมการการเคลื่อนที่ (equation of motion) สำหรับ φ จากนั้นจงคำนวณหาโมเมนต์ความเฉื่อย I_S ของระบบรอบแกนสมมาตร S ในรูปของ T, b และปริมาณทราบค่าในสมการ (1) นักเรียนอาจจะสมมติว่าเราทราบระบบออกจากตำแหน่งสมดุลไปด้วยมุมเล็กๆ ซึ่งทำให้ φ มีค่าน้อยๆ เสมอ

0.5pt

จากการวัดในคำถาม A.1 และ A.2 ตอนนี้เราต้องการคำนวณหาค่าของตัวแปรบอกขนาดและตำแหน่งของแผ่นกลมโลหะที่อยู่ในทรงกระบอกไม้

A.3	จงหาค่าของระยะ d ในรูปฟังก์ชันของ b และปริมาณในสมการ (1) นักเรียนอาจจะรวมตัวแปร r_2 และ h_2 ไว้ในคำตอบด้วยก็ได้ เพราะตัวแปรทั้งสองจะถูกคำนวณในข้อย่อย A.5	0.4pt
A.4	จงหาค่าของโมเมนต์ความเฉื่อย I_S ในรูปของ b และปริมาณที่ทราบค่าใน (1) นักเรียนอาจจะรวมตัวแปร r_2 และ h_2 ไว้ในคำตอบด้วยก็ได้ เพราะตัวแปรทั้งสองจะถูกคำนวณในข้อย่อย A.5	0.7pt
A.5	ให้นักเรียนใช้ผลที่ได้มาแล้วทั้งหมดเพื่อหาค่า h_2 และ r_2 ในรูปของ b, T และปริมาณที่ทราบค่าใน (1) นักเรียนอาจจะตอบค่าของ h_2 ในรูปของ r_2 ด้วยก็ได้	1.1pt

ข้อ B. สถานีอวกาศหมุน (6.5 คะแนน)

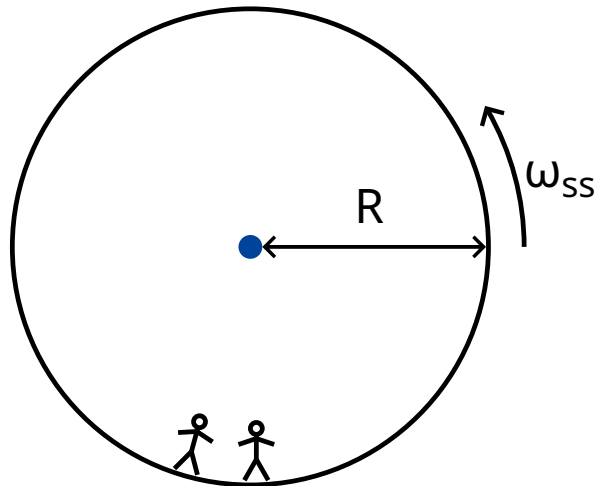
อลิศเป็นนักบินอวกาศซึ่งอาศัยอยู่ในสถานีอวกาศ สถานีอวกาศเป็นวงล้อยักษ์ที่มีรัศมี R และหมุนรอบแกนของมันตลอดเวลาเพื่อสร้างความโน้มถ่วงสังเคราะห์สำหรับนักบินอวกาศเนื่องจากในอวกาศไม่มีแรงโน้มถ่วง นักบินอวกาศอาศัยอยู่บนด้านในของขอบวงล้อ นักเรียนไม่ต้องคำนึงถึงแรงดึงดูดเนื่องจากมวลของสถานีอวกาศ และความโค้งของพื้นสถานีสามารถละเลยได้

B.1	สถานีอวกาศต้องหมุนด้วยอัตราเร็วเชิงมุม ω_{ss} เท่าไร เพื่อที่จะทำให้นักบินอวกาศรู้สึกถึงความโน้มถ่วง g_E เช่นเดียวกับบนผิวโลก	0.5pt
------------	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------

อลิศ (Alice) และเพื่อนนักบินอวกาศของเธอที่ชื่อบ๊อบ (Bob) กำลังถกเถียงกัน บ๊อบไม่เชื่อว่าจะจริงๆ แล้วพวกเขาอาศัยอยู่บนสถานีอวกาศและยืนยันว่าพวกเขานั้นอยู่บนโลก อลิศต้องการพิสูจน์ให้บ๊อบเห็นด้วยหลักการทางฟิสิกส์ว่า พวกเขาอาศัยอยู่บนสถานีอวกาศที่กำลังหมุนอยู่ ในการพิสูจน์นี้อลิศติดมวล m ไว้ที่ปลายสปริงซึ่งมีค่าคงที่สปริง k แล้วปล่อยให้สั่น โดยสำหรับการทดลองนี้มวลสั่นได้ในแนวตั้งเท่านั้นและไม่สามารถเคลื่อนที่ในแนวระดับได้

B.2	สมมติว่าบนโลกความโน้มถ่วงมีค่าคงตัวด้วยค่าความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วง g_E ค่าความถี่เชิงมุมของการสั่น ω_E ที่คนบนโลกสามารถวัดได้มีค่าเท่าไร	0.2pt
B.3	ความถี่เชิงมุมของการสั่น ω ที่อลิศวัดบนสถานีอวกาศมีค่าเท่าไร	0.6pt

อลิศเชื่อมั่นว่าการทดลองของเธอพิสูจน์ได้ว่าพวกเธอยุบนสถานีอวกาศ แต่บ๊อบยังกังขาอยู่ เขาอ้างว่าเมื่อคิดผลจากการเปลี่ยนแปลงความโน้มถ่วงเนื่องจากความสูงเหนือผิวโลกผลกระทบที่เกิดขึ้นก็ไม่ต่างกัน ในคำถามต่อจากนี้เราจะมาทดสอบกันว่าบ๊อบถูกหรือไม่



รูปที่ 4: สถานีอวกาศ

- B.4** จงคำนวณหาสูตรของความโน้มถ่วง $g_E(h)$ สำหรับค่าความสูง h น้อย ๆ เหนือผิวโลก และคำนวณหาค่าความถี่เชิงมุม $\tilde{\omega}_E$ ของการสั่นของมวล (ใช้ linear approximation ก็เพียงพอ) กำหนดให้รัศมีของโลกมีค่า R_E และไม่คิดผลจากการหมุนของโลก 0.8pt

แต่เมื่อทดลองแล้วลึศพบว่า สำหรับสถานีอวกาศนี้ ลูกตุ้มสปริงก็สั่นด้วยความถี่ตามแบบที่บ็อบทำนายไว้

- B.5** รัศมี R ของสถานีอวกาศนี้ต้องมีค่าเท่าไร จึงจะทำให้ความถี่เชิงมุมของการสั่น ω มีค่าเป็นไปตามความถี่เชิงมุม $\tilde{\omega}_E$ บนโลกตามแบบที่บ็อบทำนายไว้ ให้ตอบในเทอมของ R_E 0.3pt

เมื่อโดนยั่วโทสะด้วยความหัวแข็งของบ็อบ อลิศก็ได้คิดการทดลองใหม่ขึ้นมาเพื่อพิสูจน์จุดยืนของเธอ เธอจึงปีนขึ้นไปบนหอคอยสูง H เหนือพื้นของสถานีอวกาศแล้วปล่อยมวลลงมา การทดลองนี้สามารถทำความเข้าใจได้ทั้งในกรอบอ้างอิงที่หมุนและกรอบอ้างอิงเฉื่อย

ในกรอบอ้างอิงที่หมุนอย่างสม่ำเสมอ นักบินอวกาศจะรับรู้ถึงแรงเทียม \vec{F}_C ซึ่งเรียกว่าแรงโคริโอลิส (Coriolis force) โดยแรง \vec{F}_C นี้ที่กระทำต่อวัตถุมวล m เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว \vec{v} ในกรอบอ้างอิงซึ่งหมุนด้วยความเร็วเชิงมุมคงตัว $\tilde{\omega}_{ss}$ มีค่า

$$\vec{F}_C = 2m\vec{v} \times \tilde{\omega}_{ss} . \quad (2)$$

นักเรียนอาจจะใช้สูตรนี้ในรูปสเกลาร์ได้ดังนี้

$$F_C = 2mv\omega_{ss} \sin \phi , \quad (3)$$

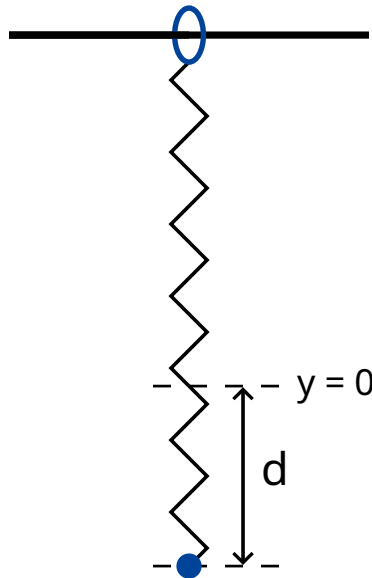
เมื่อ ϕ คือมุมระหว่างความเร็วกับแกนหมุน แรงนี้ตั้งฉากกับทั้งความเร็ว v และแกนหมุน เครื่องหมายของแรงสามารถหาได้จากกฎมือขวา แต่ในคำถามต่อจากนี้ นักเรียนสามารถเลือกทิศได้อย่างอิสระ

B.6 จงคำนวณหาค่าประกอบของความเร็วในแนวระดับ v_x และการกระจัดในแนวระดับ d_x 1.1pt
(วัดจากฐานของหอคอยในทิศทางตั้งฉากกับหอคอย) ของมวลในขณะที่มวลตกถึงพื้นพอดี
ในช้อย่อยนี้ นักเรียนอาจจะสมมติว่าความสูง H ของหอคอยนั้นมีค่าน้อยพอที่จะทำให้
ความเร่งที่วัดโดยนักบินอวกาศมีค่าคงตัวระหว่างการตก และนักเรียนยังสามารถสมมติได้ว่า
 $d_x \ll H$

เพื่อให้ได้ผลการทดลองที่ดี อลิศตัดสินใจที่จะทำการทดลองบนหอคอยที่สูงกว่าหอคอยเดิมมากๆ ผลที่ได้ทำให้อลิศแปลกใจเพราะความสูงที่เธอเลือกทดลองนั้นบังเอิญทำให้มวลตกถึงพื้นี่ฐานหอคอยพอดี หรือ $d_x = 0$

B.7 จงคำนวณหาค่าความสูงของหอคอยที่น้อยที่สุดที่ไม่ใช่ศูนย์ที่ทำให้ $d_x = 0$ เกิดขึ้นได้ 1.3pt

อลิศอยากที่จะทำการทดลองเพิ่มอีกเป็นครั้งสุดท้ายเพื่อที่จะทำให้บ๊อบเชื่อเธอ อลิศต้องการใช้ระบบสปริงสั้นของเธอเพื่อแสดงให้เห็นผลของแรงโคริออลิส ดังนั้นเธอจึงเปลี่ยนรูปแบบการทดลองเดิมของเธอดังนี้ เธอติดสปริงเข้ากับวงแหวนซึ่งสามารถเลื่อนไปมาบนราวที่พาดในแนวระดับได้อย่างอิสระในแนวแกน x โดยไร้ความเสียดทาน ตัวสปริงเองสามารถสั้นได้ในแนวแกน y ราวถูกวางขนานกับพื้นและตั้งฉากกับแกนหมุนของสถานีอวกาศ ระนาบ xy จึงตั้งฉากกับแกนหมุน โดยทิศ y ชี้ตรงเข้าหาศูนย์กลางการหมุนของสถานีอวกาศ



รูปที่ 5: รูปแบบการทดลอง

B.8 อลิศดึงมวลลงเป็นระยะ d จากจุดสมดุล $x = 0, y = 0$ แล้วปล่อยให้มวลเคลื่อนที่ (ดูรูปที่ 5) 1.7pt

- จงหาสมการของ $x(t)$ และ $y(t)$ ที่เวลา t ใดๆ นักเรียนอาจจะสมมติว่า $\omega_{ss}d$ มีค่าน้อย และไม่ต้องคำนึงถึงผลของแรงโคริออลิสสำหรับการเคลื่อนที่ในแนวแกน y
- จงวาดเส้นทางการเคลื่อนที่ (trajectory) $(x(t), y(t))$ พร้อมทั้งเขียนกำกับส่วนประกอบที่สำคัญ เช่น แอมพลิจูด

อลิศและบ็อบก็ยังคงเถียงกันต่อไป