

İki Mekanik Problemi (10 puan)

Bu soruya başlamadan önce lütfen ayrı bir zarfta verilen genel talimatları okuyunuz.

Kısım A. Gizli Disk (3.5 puan)

r_1 yarıçaplı h_1 kalınlıklı tahtadan yapılmış katı bir silindir düşününüz. Bu tahta silindirin içinde bir yerlerde yarıçapı r_2 olan kalınlığı ise h_2 olan metal bir disk vardır. Bu metal diskin simetri eksenini B ile tahta silindirin simetri eksenini S birbirlerine paraleldir. Metal disk, tahta silindirin üst ve alt yüzeylerinden eşit uzaklıkta olacak şekilde yerleştirilmiştir. S eksenini ile B eksenini arasındaki mesafe d olsun. Tahtanın yoğunluğu ρ_1 metalin yoğunluğu $\rho_2 > \rho_1$. Silindirin ve içindeki metal diskin toplam kütlesi M 'dir.

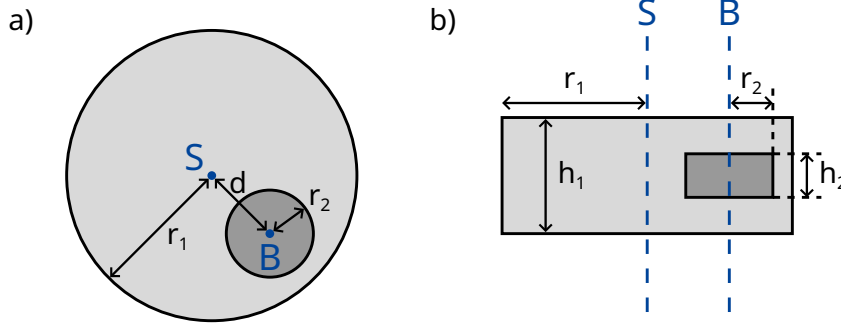
Bu kısımda, tahta silindiri sağa ve sola serbestçe yuvarlanacak şekilde yere bırakıyoruz. Silindirin yandan ve üstten görüşlerini görmek için Şekil-1'e bakınız.

Bu kısımda metal diskin konumunu ve boyutlarını bulmanız istenmektedir.

Bundan sonraki sorularda sizden istenilen şeyi diğer verilenler cinsinden bulunuz denildiğinde ,aşağıdakilerin verilmiş olduğunu kabul ediniz.

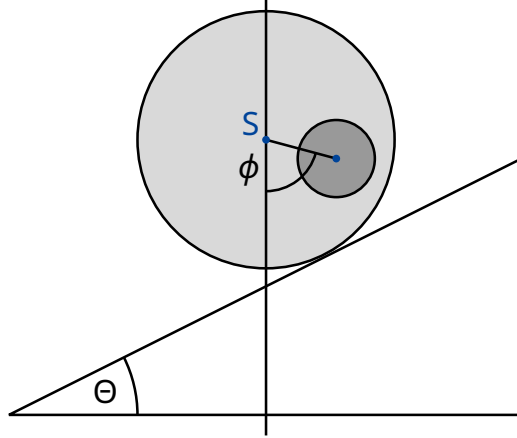
$$r_1, h_1, \rho_1, \rho_2, M. \quad (1)$$

r_2, h_2 ve d değerlerini dolaylı ölçümler yoluyla bulmanız istenecektir.



Şekil-1: a) Yandan görünüm b) Üstten görünüm

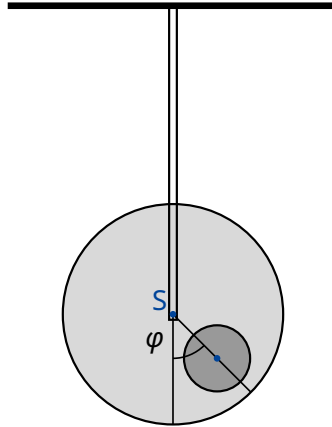
Tahta silindirin simetri eksenini S ile tüm sistemin kütle merkezi C arasındaki mesafe b olsun. Bu mesafeyi bulabilmek için aşağıdaki gibi bir deney tasarlanıyor. Tahta silindiri yatay bir yüzey üzerinde dengede kalacak şekilde koyuyoruz. Daha sonra yüzeyi yavaşça Θ açısına kadar kaldırıyoruz. (Şekil-2) Statik sürtünme sayesinde silindir kaymadan yuvarlanma hareketi yapabilmektedir. Silindir eğik düzlem üzerinde az bir miktar yuvarlanıyor ve daha sonra ϕ kadar döndükten sonra dengeye gelip duruyor.



Şekil-2: Eğik düzlemdeki silindir

A.1 b değerinin ifadesini eğik düzlem açısı Θ , açı ϕ ve diğer verilenler (1) cinsinden 0.8pt bulunuz.

Bundan sonra b değerinin bir bilinen olduğunu kabul edeceğiz.



Şekil-3: Asılmış sistem

Şimdi simetri eksenini S 'ye göre, sistemin eylemsizlik momentini I_S 'yi bulacağız. Silindiri kendi simetrik ekseninden katı bir çubukla asıyoruz. Silindiri denge durumundan küçük bir φ açısı kadar döndürüyoruz ve daha sonra serbest bırakıyoruz. Şekil-3'e bakınız. φ açısı, periyodu T olan periyodik bir hareketi tanımlamaktadır.

A.2

0.5pt

φ açısı için hareket denklemini bulunuz. Simetri eksenine S' 'ye göre sistemin eylemsizlik momentini (I_S); T , b ve verilenler (1) cinsinden bulunuz. Silindiri denge konumundan çok küçük bir açıya oynattığımızı ve φ 'nin her zaman çok küçük olduğunu kabul ediniz.

Şimdi, A.1 ve A.2 sorularında yaptığınız ölçümlerden yola çıkarak tahta silindir içindeki metal diskin konumunu ve geometrisini bulmak istiyoruz.

A.3

0.4pt

d mesafesini b ve verilenlerin (1) bir fonksiyonu olarak yazınız. Cevabınızın içinde r_2 ve h_2 ifadelerini (A.5'te hesaplanacaktır) değişken olarak kullanabilirsiniz.

A.4

0.7pt

Find an expression for the moment of inertia I_S in terms of b and the known quantities (1). You may also include r_2 and h_2 as variables in your expression, as they will be calculated in subtask **A.5**.
Eylemsizlik momenti I_S ifadesini b ve verilenler (1) cinsinden bulunuz. Cevabınızın içinde r_2 ve h_2 ifadelerini (A.5'te hesaplanacaktır) değişken olarak kullanabilirsiniz.

A.5

1.1pt

Yukarıda bulunan tüm sonuçları kullanarak h_2 ve r_2 ifadelerini b , T ve verilenler (1) cinsinden bulunuz. h_2 ifadesini r_2 cinsinden yazabilirsiniz.

Kısım B. Dönen Uzay İstasyonu (6.5 puan)

Alice uzay istasyonunda yaşayan bir astronottur. Yarıçapı R olan büyük bir teker görünümlü, eksenine etrafında dönen uzay istasyonları astronotlar için yapay bir yer çekimi oluşturur. Astronotlar teker jantının iç kısmında yaşarlar. Uzay istasyonunun oluşturduğu kütle çekim etkisi ve zeminin eğriliği ihmal edilebilir.

B.1

0.5pt

Astronotların Dünya'daki yer çekimi ivmesi g_E ile aynı ivmeyi hissedebilmeleri için uzay istasyonu hangi ω_{ss} açısal hızıyla dönmelidir?

Alice ve astronot olan arkadaşı Bob arasında bir tartışma çıkmaktadır. Bob kendilerinin bir uzay istasyonunda yaşadıklarına inanmamakta ve Dünya'da olduklarını düşünmektedir. Alice ise Bob'a, aslında dönen bir uzay istasyonunda yaşadıklarını fizik kullanarak ispatlamak istiyor. Alice yay sabiti k olan bir yay ucuna m kütlesi asıyor ve salınım yapmasına izin veriyor. Bu kütle sadece dikeyde salınmakta olup yatayda herhangi bir hareketi yoktur.

B.2

0.2pt

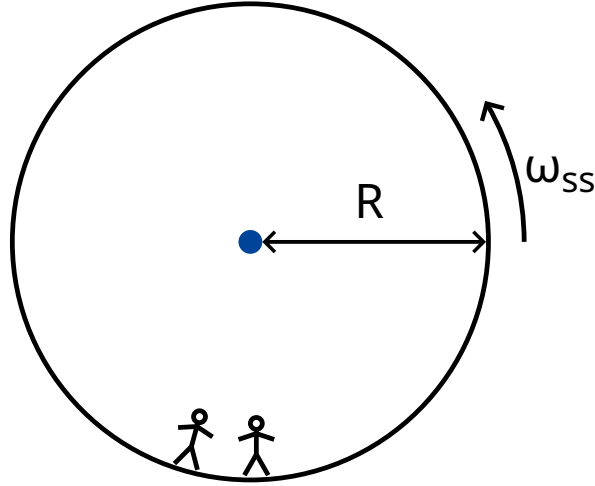
Dünya'daki yer çekimi ivmesi g_E 'nin sabit olduğunu kabul edersek, Dünya'daki bir insanın ölçeceği bu titreşimin açısal frekansı ω_E ne olur?

B.3

0.6pt

Alice'in uzay istasyonunda ölçtüğü açısal titreşim frekansı ω ne olur?

Alice yaptığı deneyin kendilerinin uzay istasyonunda yaşadıklarını ispatlayacağını düşünmektedir. Fakat Bob hala şüphe etmektedir. Bob, Dünya yüzeyinin yukarısında yer çekimi ivmesindeki değişimi hesaba kattığımızda, aynı sonucun bulunabileceğini iddia etmektedir. Bundan sonraki sorularda Bob'un haklı olup olmadığını inceleyeceğiz.



Şekil-4: Uzay istasyonu

- B.4** Dünya yüzeyinden küçük bir h yüksekliğindeki yer çekimi ivmesi $g_E(h)$ için bir ifade türetiniz. Salınım yapan kütlelerin titreşim frekansını $\tilde{\omega}_E$ hesaplayınız (lineer yaklaşım yapmanız yeterlidir). Dünya'nın yarıçapı R_E 'dir. Dünya'nın dönüşünü ihmal ediniz. 0.8pt

Alice, aslında bu uzay istasyonu için, yaylı sarkacın Bob'un tahmin ettiği frekansta titreştiğini anlayacaktır.

- B.5** Titreşim frekansı ω , uzay istasyonunun yarıçapı R 'nin hangi değeri için, Dünya'daki titreşim frekansı $\tilde{\omega}_E$ ile aynı değere sahiptir? Cevabınızı R_E cinsinden ifade ediniz. 0.3pt

Bob'un inatçılığına sinirlenen Alice haklılığını ispatlamak için yeni bir deney bulmuştur. Uzay istasyonunun tabanından H yükseklikte bir kuleye tırmanmakta ve oradan aşağıya bir kütle bırakmaktadır. Bu deney eylemsiz bir referans sisteminde olduğu gibi dönen bir referans sisteminde de anlaşılabilir.

Sabit hızla dönen bir referans sisteminde astronomlar Coriolis kuvveti (\vec{F}_C) diye adlandırılan hayali bir kuvvet hissederler. Sabit $\vec{\omega}_{ss}$ açısal hızıyla dönen bir sistemin içindeki m kütleli \vec{v} hıza sahip bir cismin üzerine etkiyen kuvvet \vec{F}_C aşağıdaki şekilde verilmiştir.

$$\vec{F}_C = 2m\vec{v} \times \vec{\omega}_{ss} . \quad (2)$$

Skalar büyüklükler cinsinden, aşağıdaki şekilde kullanabilirsiniz.

$$F_C = 2m\omega_{ss} v \sin \phi , \quad (3)$$

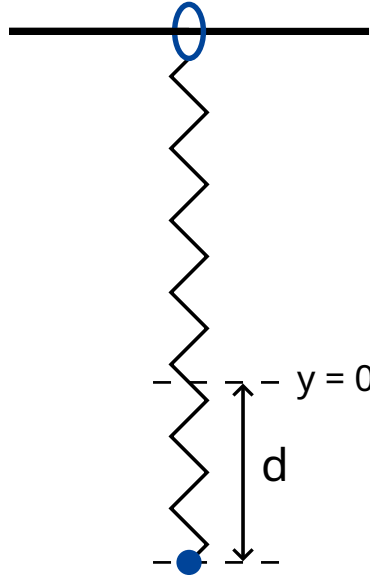
Burada ϕ , dönme eksenine ile hız arasındaki açıdır. Etkiyen kuvvet hem v hızına ve hem de dönme eksenine diktir. Kuvvetin işareti sağ-el-kuralına göre belirlenebilir ama bundan sonra istediğiniz şekilde seçmekte özgürsünüz.

- B.6** Kütle tam yere düştüğü anda, yatay hızı v_x ile yataydaki yerdeğiştirmesi (kulenin dibine göre) d_x değerlerini hesaplayınız. Kulenin yüksekliğinin küçük olduğunu, bu yüzden düşüş boyunca astronotun ölçtüğü ivmenin sabit kaldığını kabul ediniz. Ayrıca $d_x \ll H$ kabul edebilirsiniz. 1.1pt

Alice güzel bir sonuç elde etmek için daha uzun bir kule kullanmaya karar veriyor. Fakat bu sefer kütle kulenin hemen dibine düşüyor ($d_x = 0$) ve Alice şaşırıyor.

- B.7** Bu olayın ($d_x = 0$) yaşanması için gerekli kule uzunluğunun en alt değerini bulunuz. 1.3pt

Bob'u ikna edebilmek için Alice son bir deney daha yapmak istiyor. Alice yaylı sarkacı kullanarak Coriolis kuvvetinin etkisini göstermek istiyor ve bu yüzden orijinal düzeneğini biraz değiştiriyor. Yayın bir ucunu x yönündeki çubuğa geçirilmiş yüzüğe bağlıyor. Yüzük yatay çubuk üzerinde sürtünmesizce hareket edebilmektedir. Yay ise y yönünde titreşim yapmaktadır. Çubuk yere paralel, uzay istasyonunun dönme eksenine ise diktir. Bu yüzden xy düzlemi dönme eksenine diktir. (y yönü istasyonun dönme merkezini işaret etmektedir)



Şekil-5: Düzenek

- B.8** Alice kütleli denge durumundan ($x = 0, y = 0$) d kadar aşağıya çekiyor ve serbest bırakıyor. (Şekil-5) 1.7pt
- $x(t)$ ve $y(t)$ ifadelerini bulunuz. $\omega_{ss}d$ değerinin küçük olduğunu kabul edebilirsiniz. y eksenindeki hareket için Coriolis kuvvetini ihmal ediniz.
 - $(x(t), y(t))$ yörüngelerini çiziniz. Genlik gibi önemli noktaları gösteriniz.

Alice ve Bob tartışmaya devam edeceklerdir.