

Две задачи по механике (10 баллов)

Прежде, чем приступить к решению задачи, прочитайте инструкцию.

Часть А. Спрятанный диск (3,5 балла)

Рассмотрим твердый деревянный цилиндр радиуса r_1 и толщиной h_1 . Где-то внутри деревянного цилиндра древесина заменена на металлический диск радиуса r_2 и толщиной h_2 . Металлический диск установлен так, что его ось симметрии B параллельна оси симметрии S деревянного цилиндра. Диск находится на одинаковых расстояниях от верхнего и нижнего оснований деревянного цилиндра. Обозначим расстояние между осями S и B как d . Плотность древесины ρ_1 , плотность металла $\rho_2 > \rho_1$. Суммарная масса деревянного цилиндра с металлическим диском равна M .

В этом задании поместим деревянный цилиндр на плоскость так, что он может свободно вращаться направо-налево. На рис. 1 показаны виды цилиндра с торца и сверху.

Цель этого задания — определить размеры и место расположения металлического диска.

Считайте, что следующие величины заданы:

$$r_1, h_1, \rho_1, \rho_2, M. \quad (1)$$

Цель — определить r_2 , h_2 и d путем косвенных измерений.

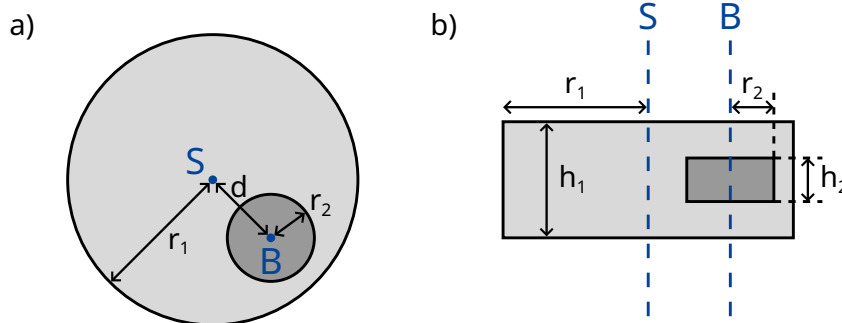


Рис. 1. а) вид с торца цилиндра б) вид сверху

Расстояние между центром масс всей системы C и осью симметрии деревянного цилиндра S равно b . Для того, чтобы определить это расстояние, рассмотрим следующий эксперимент: деревянный цилиндр установлен на горизонтальной плоскости так, что он находится в устойчивом равновесии. Медленно наклоним плоскость на угол Θ (см. рис. 2). Из-за наличия трения деревянный цилиндр может свободно вращаться без проскальзывания. Он чуть-чуть скатится вниз, а затем придет в состояние устойчивого равновесия после поворота на угол ϕ , который можно измерить.

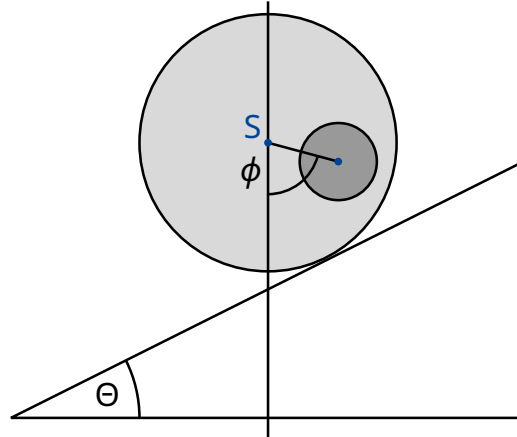


Рис. 2. Цилиндр на наклонной плоскости.

- A.1** Получите выражение для b как функцию величин (1), угла ϕ и угла наклона плоскости Θ . 0.8pt

С этого момента считаем, что величина b известна.

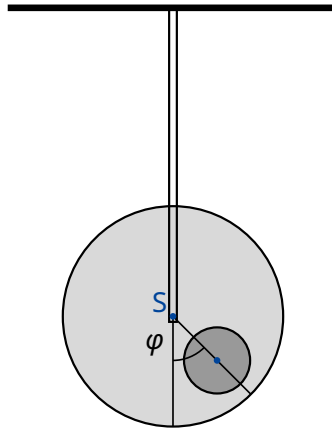


Рис. 3. Подвешенная система.

Теперь мы хотим измерить момент инерции I_S системы относительно оси симметрии S . Для этого закрепим деревянный цилиндр за его ось симметрии с помощью жесткого стержня. Затем повернем его относительно положения равновесия на небольшой угол φ и отпустим его. Схема эксперимента показана на рис. 3. Окажется, что φ меняется периодически с периодом T .

- A.2** Получите уравнение движения, используя φ в качестве переменной. Выразите момент инерции цилиндра I_S относительно его оси симметрии S через T , b и известные величины (1). Считайте, что отклонение от положения равновесия невелико, так что угол φ можно считать малой. 0.5pt

Используя результаты измерений из пунктов **A.1** и **A.2**, определим геометрические размеры металлического диска и его положение внутри деревянного цилиндра.

A.3 Получите выражение для расстояния d как функцию b и величин (1). Вы можете также включить в ваше выражение в качестве переменных r_2 и h_2 , т.к. они будут вычислены в пункте **A.5**. 0.4pt

A.4 Получите выражение для момента инерции I_S как функцию b и известных величин (1). Вы можете также включить в ваше выражение в качестве переменных r_2 и h_2 , т.к. они будут вычислены в пункте **A.5**. 0.7pt

A.5 Используя полученные выше результаты, запишите выражения для h_2 и r_2 через b , T и известные величины (1). Вы можете выразить h_2 как функцию r_2 . 1.1pt

Часть В. Вращающаяся космическая станция (6,5 баллов)

Алиса — космонавт, она живет на космической станции. Космическая станция представляет собой гигантское колесо радиуса R , которое вращается вокруг своей оси, тем самым создавая для космонавтов искусственную гравитацию. Космонавты живут на внутренней стороне обода колеса. Силой гравитационного притяжения космической станции и кривизной пола можно пренебречь.

B.1 С какой циклической частотой ω_{ss} должна вращаться станция, чтобы космонавты испытывали такое же ускорение свободного падения g_E , как на поверхности Земли? 0.5pt

Алиса поспорила со своим другом — космонавтом Бобом. Боб не верит в то, что они действительно живут на космической станции и утверждает, что они находятся на Земле. Алиса хочет с помощью физики доказать Бобу, что они живут на вращающейся космической станции. Для этого она прикрепила груз массы m к пружине с жёсткостью k и заставила её колебаться. Груз колеблется только в вертикальном направлении и не может перемещаться в горизонтальном направлении.

B.2 Полагая, что ускорение свободного падения на Земле постоянно и равно g_E , чему будет равна циклическая частота колебаний ω_E , измеренная человеком на Земле? 0.2pt

B.3 Какую циклическую частоту ω измерит Алиса на космической станции? 0.6pt

Алиса считает, что ее опыт доказывает, что они находятся на вращающейся космической станции. Боб по-прежнему сомневается. Он утверждает, что если принять во внимание изменение силы притяжения по мере поднятия над поверхностью Земли, получится то же самое.

В дальнейших заданиях мы изучим вопрос, прав ли Боб.

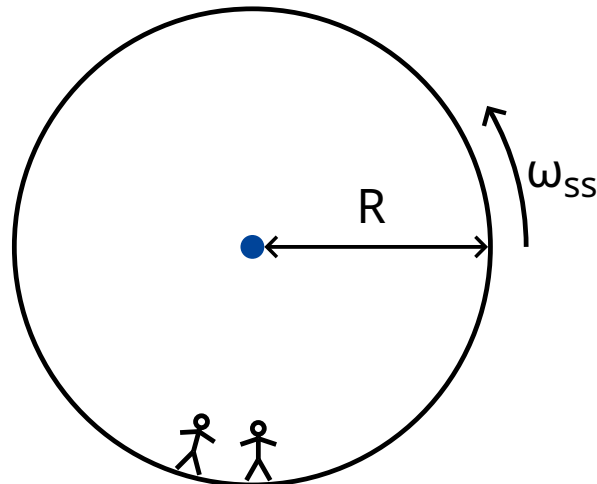


Рис. 4. Космическая станция

- B.4** Получите выражение для ускорения свободного падения $g_E(h)$ для небольших высот h над поверхностью Земли и вычислите циклическую частоту колебаний $\tilde{\omega}_E$ колеблющегося груза (достаточно использовать линейное приближение). Обозначьте радиус Земли за R_E . Вращением Земли можно пренебречь. 0.8pt

Разумеется, для данной космической станции Алиса обнаружила, что пружинный маятник колеблется с той частотой, которую предсказал Боб.

- B.5** Для какого радиуса космической станции R частота колебаний ω совпадает с частотой колебаний $\tilde{\omega}_E$ на поверхности Земли? Выразите свой ответ через R_E . 0.3pt

Раздраженная упрямством Боба, Алиса решила провести эксперимент, чтобы доказать свою точку зрения. Для этого она залезла на башню высотой H от пола и уронила груз. Этот эксперимент можно рассматривать во вращающейся системе координат, а также в инерциальной системе координат.

В равномерно вращающейся системе координат на космонавтов действует фиктивная сила \vec{F}_C , называемая силой Кориолиса. Сила \vec{F}_C , действующая на объект массой m , движущийся со скоростью \vec{v} в системе координат, вращающейся с постоянной циклической частотой $\vec{\omega}_{ss}$ определяется выражением

$$\vec{F}_C = 2m\vec{v} \times \vec{\omega}_{ss}. \quad (2)$$

Вы можете использовать это выражение в скалярном виде:

$$F_C = 2mv\omega_{ss} \sin \phi, \quad (3)$$

где ϕ — угол между скоростью и осью вращения. Сила перпендикулярна как скорости v , так и оси вращения. Знак силы определяется правилом правой руки, но в дальнейшем вы можете свободно выбрать его по своему усмотрению.

- B.6** Вычислите горизонтальную скорость v_x и горизонтальное смещение d_x (относительно пола башни в направлении, перпендикулярном башне) груза в момент времени, когда он ударится о пол. Можете считать, что высота H башни мала, так что ускорение, измеренное космонавтами постоянно во время падения. Также вы можете считать, что $d_x \ll H$. 1.1pt

Для получения хороших результатов Алиса решила провести этот опыт, используя гораздо более высокую башню, чем раньше. К её удивлению, масса упала на пол около основания башни, т.е. $d_x = 0$.

- B.7** Найдите минимальную высоту башни, для которой может произойти, что $d_x = 0$. 1.3pt

Алиса хочет предпринять последнюю попытку убедить Боба. Она хочет использовать свой пружинный маятник, чтобы показать влияние силы Кориолиса. Для этого она переделала установку: прикрепила пружину к кольцу, которое может свободно скользить по горизонтальному стержню вдоль оси x без трения. Сама пружина колеблется в направлении y . Стержень параллелен полу и перпендикулярен оси вращения космической станции. Плоскость xy таким образом перпендикулярна оси вращения, а ось y направлена к центру вращения станции.

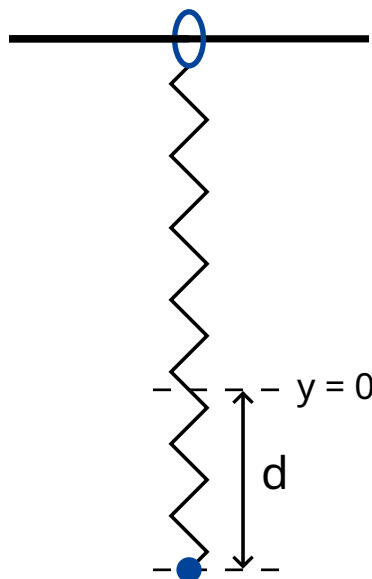


Рис. 5. Установка.

- B.8** Алиса потянула груз на расстояние d вниз от положения равновесия $x = 0$, $y = 0$, а затем отпустила (рис. 5). 1.7pt
- Приведите алгебраические выражения для $x(t)$ и $y(t)$. Величину $\omega_{ss}d$ можно считать малой. Можно пренебречь силой Кориолиса для движения вдоль оси y .
 - Нарисуйте схематично траекторию $(x(t), y(t))$, отметив все характерные особенности, в частности, амплитуду.

Алиса и Боб продолжают спорить.