

兩個力學問題 (10 分)

在開始作答之前，請先細讀另一信封袋內的「理論考試通用指引」。

A 部分. 隱藏的圓盤 (3.5 分)

考慮一個半徑 r_1 、厚度 h_1 的木頭圓柱體，在其內部某處嵌置有一個半徑 r_2 、厚度 h_2 的金屬圓盤，此圓盤的對稱軸 B 與木頭圓柱體的對稱軸 S 彼此平行，且圓盤到圓柱體頂部與底部兩個表面的距離相等。令對稱軸 S 與 B 的距離為 d ，木頭的密度為 ρ_1 ，金屬的密度為 $\rho_2 > \rho_1$ 。木頭圓柱體加上內部金屬圓盤的總質量為 M 。

在本題中，我們將圓柱體平放於地面上，使其可以左右自由滾動。圖 1 顯示它的側視圖與俯視圖。

本題的目標是要求出金屬圓盤的尺寸與位置。

以下你要求你以已知量表示結果時，你可假設下列各量為已知量：

$$r_1, h_1, \rho_1, \rho_2, M. \quad (1)$$

本題的目標是要經由一些間接的測量，以決定 r_2, h_2 及 d 。

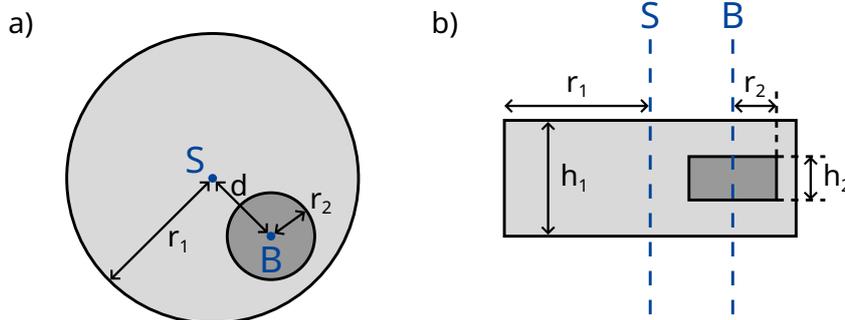


圖 1：a) 側視圖 與 b) 俯視圖

整個系統的質心 C 到圓柱體對稱軸 S 的距離為 b 。為了決定這個距離，我們設計了以下的實驗：我們先將圓柱體擺放到一個水平基座上，使它處於穩定平衡狀態。然後慢慢的使基座傾斜一個角度 Θ (見圖 2)。由於靜摩擦力的作用，圓柱體可以自由作純滾動而不致滑動。經由測量，圓柱體在往下稍微滾動一個角度 ϕ 後，會停止不動，而處於穩定平衡狀態。

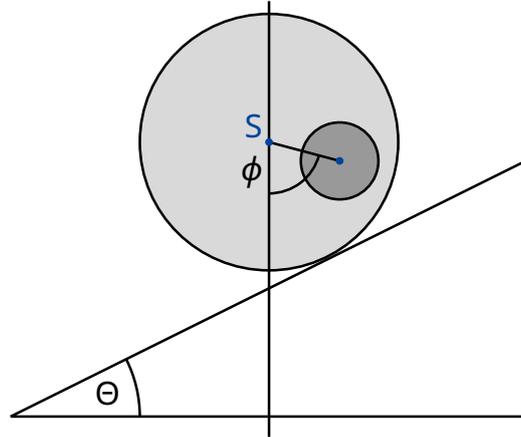


圖 2：在傾斜基座上的圓柱體。

A.1 試將 b 表示為角度 ϕ 、傾斜角 Θ 與 (1) 式所示已知量的函數。

0.8pt

自此之後，我們將假設 b 的值為已知。

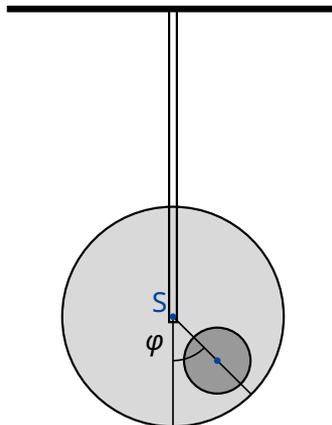


圖 3：懸吊的系統

接著，我們想要求出圓柱體繞其對稱軸 S 的轉動慣量 I_S 。為此，我們吊起它的對稱軸，使圓柱體 S 軸與水平面平行懸掛。然後使它偏離平衡位置一個角度 φ 後，再放開它。實驗裝置圖請參見圖 3。我們發現 φ 所描述的是一個週期為 T 的週期性運動。

A.2 求角度 φ 所滿足的運動方程式。試將圓柱體繞其對稱軸 S 的轉動慣量 I_S ，以 T 、 b 與 (1) 式中的已知量表示。你可假設我們對平衡位置的擾動很微小，以至於 φ 總是很小。 0.5pt

由 **A.1** 與 **A.2** 兩題所作的測量，我們現在想決定圓柱體內圓盤的位置與幾何形狀。

A.3 試將距離 d 表示為 b 與 (1) 式所示已知量的函數。你的表示式中所含的變數，可以包括以下 **A.5** 題即將計算的 r_2 與 h_2 。 0.4pt

A.4 試將轉動慣量 I_S 表示為 b 與 (1) 式所示已知量的函數。你的表示式中所含的變數，可以包括以下 **A.5** 題即將計算的 r_2 與 h_2 。 0.7pt

A.5 利用以上得到的所有結果，試將 h_2 與 r_2 表示為 b 、 T 與 (1) 式所示已知量的函數。你可以用 r_2 的函數來表示 h_2 。 1.1pt

B 部分. 轉動的太空站 (6.5 分)

太空人艾莉絲居住在太空站裡。太空站是一個半徑為 R 的巨大輪子，藉由繞著它的中心軸旋轉，以提供太空人一種人造的重力加速度。太空人在輪輞 (輪的邊緣) 的內側表面上 (以下簡稱太空站底面)，進行各種活動。此太空站很輕，故不需考慮它的重力效應。

B.1 如果太空人感受到與在地球表面一樣的重力 g_E ，則太空站轉動的角頻率 ω_{ss} 為何？ 0.5pt

艾莉絲與另一位太空人巴柏，有一點爭論。巴柏認為他們是在地球表面上，而不是在太空站內。艾莉絲想要運用物理，證明他們確實是生活在太空站中；因此她將一個質量為 m 的質點，連接於力常數為 k 的彈簧，並使其振盪。彈簧僅能沿太空站的垂直方向 (輪的徑向) 振盪，沿水平方向無法移動。

B.2 假設地球的重力加速度 g_E 為一常數，則此彈簧在地球表面上振盪時的角頻率 ω_E 為何？ 0.2pt

B.3 在太空站上，艾莉絲測得彈簧振盪的角頻率 ω 為何？ 0.6pt

艾莉絲確認她的實驗證明他們是生活在太空站上。但包柏還是半信半疑，他強調：如果考慮在地表之上之重力加速度隨高度的變化，也會出現類似於太空站的效果。他是對的嗎？

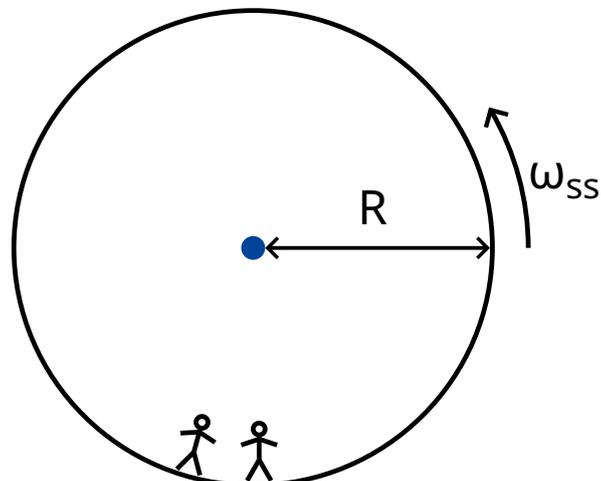


圖 4: 太空站

- B.4** 當在地表上的高度 h 不大時，重力加速度的表達式 $g_E(h)$ 為何？在此情況下，彈簧的振盪角頻率 $\tilde{\omega}_E$ 為何 (求出線性近似下的答案即可)？已知地球的半徑為 R_E 。 0.8pt

果不其然，艾莉絲發現彈簧確實是以包柏預測的頻率振盪。

- B.5** 當振盪頻率 ω 與地表測得的振盪頻率 $\tilde{\omega}_E$ 相同時，太空站的半徑 R 為何？將答案以地球半徑 R_E 表示之。 0.3pt

艾莉絲被包柏的固執所刺激，而有一個新的想法，她想利用柯氏力 (Coriolis force) 來證明她的觀點。她從太空站底面爬上站內的一座高塔，由距離太空站底面為 H 的高度，讓一個質點落下。

在均勻轉動的座標系，太空人感受到一種假想力 \vec{F}_C ，稱之為柯氏力。當質量為 m 的物體，在一轉動座標系中以速度 \vec{v} 運動時，若座標系以固定的角速度 $\vec{\omega}_{ss}$ 轉動，則作用於物體的柯氏力 \vec{F}_C 為

$$\vec{F}_C = 2m\vec{v} \times \vec{\omega}_{ss}. \quad (2)$$

當以純量表示時，你可以使用下式：

$$F_C = 2mv\omega_{ss} \sin \phi, \quad (3)$$

其中 ϕ 是物體的速度向量與轉動軸 (或角速度向量) 之間的夾角。柯氏力的方向和速度、轉動軸兩者都垂直，而此力的正負號可以用右手定則決定之。你在以下各題中，可以自行選擇一種方式來表達力。

- B.6** 計算當質點落在太空站底面瞬間的水平速度 v_x 與相對於塔底的位移 d_x (即相對於塔底的垂直距離)。你可以假設塔高度 H 相對小，因此下落加速度可以視為定值。你也可以假設 $d_x \ll H$ 。 1.1pt

為了得到好的結果，艾莉絲決定從更高的塔上進行實驗。她很驚訝地發現，質點在太空站底面的落點就在塔底部 (塔腳)，亦即 $d_x = 0$ 。

- B.7** 求能使 $d_x = 0$ 發生之塔的最小之高度。 1.3pt

為了使包柏相信，艾莉絲願意進行最後一次的嘗試。她想利用她的彈簧振盪器，以彰顯柯氏力的影響。為達此目的，她改變了原來的實驗裝置方式：她將彈簧連接到一個圓環，此圓環可在一水平直桿上沿 x 方向作無摩擦的滑動；彈簧本身則沿著 y 方向振盪。直桿與太空站底面平行，且與太空站的旋轉軸垂直。因此， xy 平面與旋轉軸垂直，而 y 軸的方向筆直指向太空站的旋轉中心。

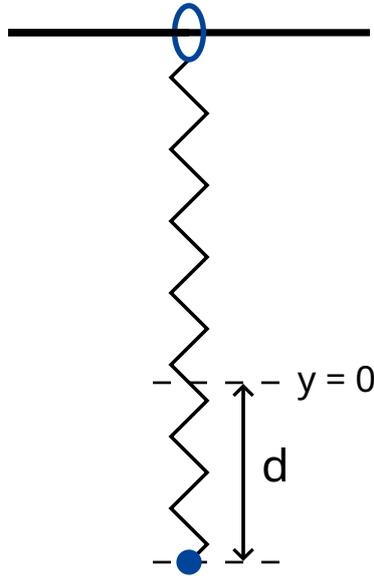


圖 4: 實驗裝置

- B.8** 艾莉絲將質點從其平衡位置 $x = 0, y = 0$ 向下拉一距離 d ，然後將它從靜止釋放 (見圖 4)。 1.7pt
- 寫出 $x(t)$ 與 $y(t)$ 的代數表示式。你可假設 $\omega_{ss}d$ 是微小的，且忽略科氏力沿著 y 軸的運動。
 - 以圖線繪出軌跡 $(x(t), y(t))$ ，並將它的各種重要特徵標示出來，例如振幅。

艾莉絲和包柏仍持續爭執著！