

Nichtlineare Dynamik in Stromkreisen (10 points)

Lies, bitte, bevor du mit der Aufgabe beginnst die allgemeinen Anweisungen im separaten Briefumschlag.

Einleitung

Bistabile nichtlineare halbleitende Komponenten (z.B. Thyristoren) finden eine breite Anwendung als Schalter und als Komponenten zur Erzeugung von elektromagnetischen Schwingungen. Die Hauptanwendung von Thyristoren liegt jedoch in der Regelung von Wechselströmen in der Leistungselektronik, z.B. die Umwandlung von Wechselströme in Gleichströme im Megawatt-Bereich. Bistabile Komponenten werden aber auch verwendet als Modellsysteme für selbstorganisierende Vorgänge in der Physik (dies wird in Teil B der Aufgaben thematisiert), in der Biologie (siehe Teil C) und in anderen modernen nichtlinearen Systemen.

Ziele

Untersuchen von Instabilitäten und nicht trivialen Dynamiken von Stromkreisen, die Bauteile mit nichtlinearen $I - U$ -Kennlinien enthalten. Entdecken möglicher Anwendungen solcher Stromkreise in der technischen Umsetzung und Modellierung biologischer Systeme.

Aufgabenteil A. Stationäre Zustände und Instabilitäten (3 Punkte)

Abb. 1 zeigt die sogenannten **S-förmigen** $I - U$ Kennlinie eines nichtlinear Bauteils X . In dem Bereich von $U_h = 4,00 \text{ V}$ (Grundspannung) und $U_{th} = 10,0 \text{ V}$ (Schwellenspannung) die $I - U$ Kennlinie mehrdeutig. Zur Vereinfachung besteht der Graph in Abb.1 stückweise aus geraden Strecken. Diese Näherung beschreibt reale Thyristoren sehr gut.

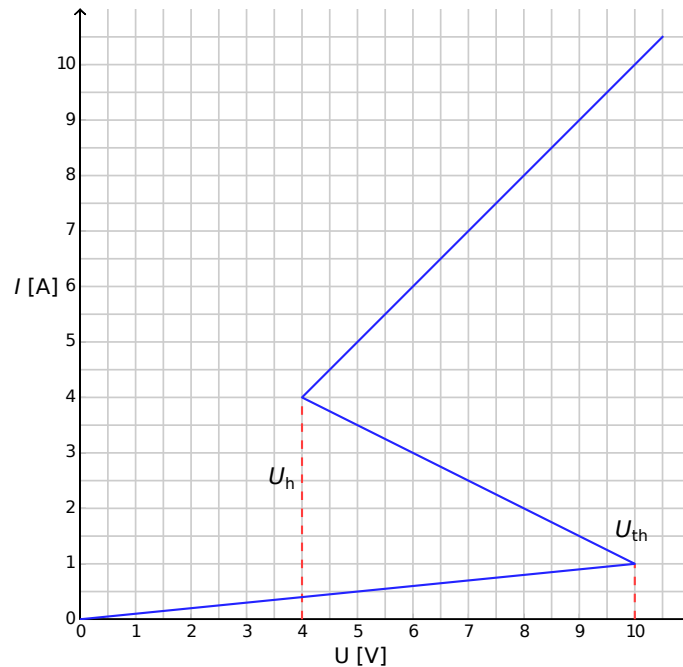


Abbildung 1: $I - U$ -Charakteristik des nichtlinearen Bauteils X .

- A.1** Bestimme mit Hilfe des Graphen jeweils den Widerstand R_{on} und R_{off} des Bauteils X im oberen bzw. unteren Abschnitt der $I - U$ -Kennlinie. Der mittlere Abschnitt wird durch folgende Gleichung beschrieben: 0.4pt

$$I = I_0 - \frac{U}{R_{int}}. \quad (1)$$

Bestimme die Werte der Parameter I_0 und R_{int} .

Der Bauteil X wird in Serie (siehe Abb.2) mit einem Widerstand R , einer Induktivität L und einer idealen Spannungsquelle \mathcal{E} geschaltet. Man sagt, dass sich der Stromkreis in einem stationären Zustand befindet, wenn die Stromstärke zeitunabhängig ist, $I(t) = \text{const}$.

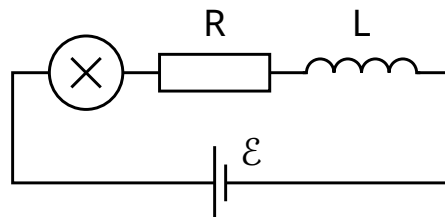


Abbildung 2: Stromkreis mit dem Bauteil X , Widerstand R , Induktivität L und Spannungsquelle \mathcal{E} .

A.2 Bestimme die mögliche Anzahl an stationären Zuständen, die der Stromkreis in Abb. 2 für einen festen Wert von \mathcal{E} und mit $R = 3,00 \Omega$ annehmen kann. Wie ändert sich das Ergebniss falls $R = 1,00 \Omega$ ist? 1pt

A.3 Es sei $R = 3,00\Omega$, $L = 1,00\mu H$ und $\mathcal{E} = 15.0 \text{ V}$ im Stromkreis der Abb. 2. Bestimme die Werte der Stromstärke $I_{\text{stationary}}$ und der Spannung $U_{\text{stationary}}$, die am nichtlinearen Bauteil X im stationären Zustand auftritt. 0.6pt

Der Stromkreis der Abb. 2 ist in einem stationären Zustand $I(t) = I_{\text{stationary}}$. Ein stationärer Zustand wird als *stabil* bezeichnet, wenn nach einer kleinen Änderung (Zunahme oder Abnahme der Stromstärke) sich die Stromstärke in Richtung des stationären Zustands annähert. Falls sich das System weiterhin vom stationären Zustand wegbewegt, ist der stationäre Zustand *instabil*.

A.4 Verwende die numerischen Werte aus Aufgabe **A.3** und untersuche damit die Stabilität des stationären Zustands mit $I(t) = I_{\text{stationary}}$. Ist der stationäre Zustand stabil oder instabil? 1pt

Aufgabenteil B. Bistabile nicht-lineare Bauteile in der Physik: Radiotransmitter (5 Punkte)

Als nächstes untersuchen wir eine neue Konfiguration des Stromkreises (siehe Abb. 3). Diesmal ist der nichtlineare Bauteil X mit einem Kondensator mit der Kapazität $C = 1.00 \mu\text{F}$ parallel geschaltet. Diese beiden Bauteile sind dann in Serie mit einem Widerstand $R = 3.00 \Omega$ und einer idealen Spannungsquelle mit konstanter Spannung $\mathcal{E} = 15.0 \text{ V}$ verbunden. Es zeigt sich, dass der Stromkreis Schwingungen erzeugt. Dabei springt während des Durchlaufs eines Schwingungszyklus' der Zustand im nichtlinearen Bauteil X von einem Abschnitt der $I - U$ - Kennlinie zu einem anderen Abschnitt.

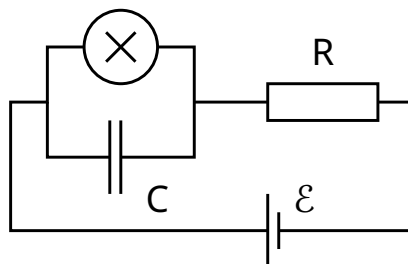


Abbildung 3: Stromkreis mit Bauteil X , Kondensator C , Widerstand R and Spannungsquelle \mathcal{E} .

B.1 Zeichne den Schwingungszyklus in der $I - U$ - Kennlinie ein, einschließlich seiner Richtung (im oder gegen den Uhrzeigersinn). Begründe deine Antwort mit Gleichungen und Skizzen. 1.8pt

B.2 Ermittle Ausdrücke für die Zeiten t_1 und t_2 , welche das System auf dem jeweiligen Abschnitt des $I - U$ Graphen während eines Zyklus verbringt. Berechne numerische Werte für diese Zeiten. Berechne die numerischen Werte für die Schwingungsdauer T unter der Annahme, dass die Zeit für die Sprünge zwischen den Abschnitten der $I - U$ Kennlinie vernachlässigbar klein ist. 1.9pt

B.3 Schätze die Durchschnittsleistung P ab, die durch den nichtlinearen Bauteil während eines Durchlaufs verbraucht wird. Eine größenordnungsmäßige Abschätzung genügt. 0.7pt

Der Stromkreis in Abb. 3 wird verwendet, um einen Radiosender zu bauen. Hierfür wird der Bauteil X an das Ende einer Stabantenne (ein langer gerader Draht) der Länge s angebracht. Das andere Drahtende ist ein freies Ende. Längs der Antenne entstehen stehende elektromagnetische Wellen. Deren Geschwindigkeit ist auch entlang der Antenne gleich der Vakuumlichtgeschwindigkeit. Der Sender verwendet die Grundschwingung, die die Periode T der Aufgabe **B.2** hat.

B.4 Wie groß ist der optimale Wert für s unter der Annahme, dass s nicht größer als 1 km sein darf? 0.6pt

Teil C. Bistabile nicht-lineare Bauteile in der Biologie: Neuristor (2 Punkte)

In diesem Teil der Aufgabe widmen wir uns der Anwendung von bistabile nicht-linearen Bauteilen auf das Modellieren biologischer Prozesse. Ein Neuron im menschlichen Gehirn hat folgende Eigenschaft: Wenn es durch ein externes Signal stimuliert wird, vollzieht das Neuron eine einzige Oszillation und kehrt dann zu seinem Ausgangszustand zurück. Diese wird als Anregbarkeit bezeichnet, wodurch Nervenpulse in dem Netzwerk gekoppelter Neuronen, dem Nervensystem, weitergeleitet werden können. Ein Halbleiterchip, entworfen um diese Erregung darzustellen, wird Neuristor genannt (Zusammensetzung aus Neuron und Transistor).

Wir versuchen einen einfachen Neuristor durch eine Schaltung zu modellieren. Diese Schaltung enthält den nicht-linearen Bauteil X , den wir schon vorher untersucht haben. Hierzu wird die Spannung \mathcal{E} in der Schaltung aus Abb. 3 auf den Wert $\mathcal{E}' = 12.0 \text{ V}$ gesenkt. Die Schwingungen hören auf und das System erreicht einen stationären Zustand. Danach wird die Spannung augenblicklich auf einen Wert $\mathcal{E} = 15.0 \text{ V}$ erhöht, und nach einer Zeit τ (mit $\tau \propto \mathcal{E}'$ gesetzt (siehe Abb. 4)). Es zeigt sich, dass ein bestimmter kritischer Wert τ_{crit} existiert, wobei das System eine qualitativ anderes Verhalten für $\tau < \tau_{\text{crit}}$ und für $\tau > \tau_{\text{crit}}$ zeigt.

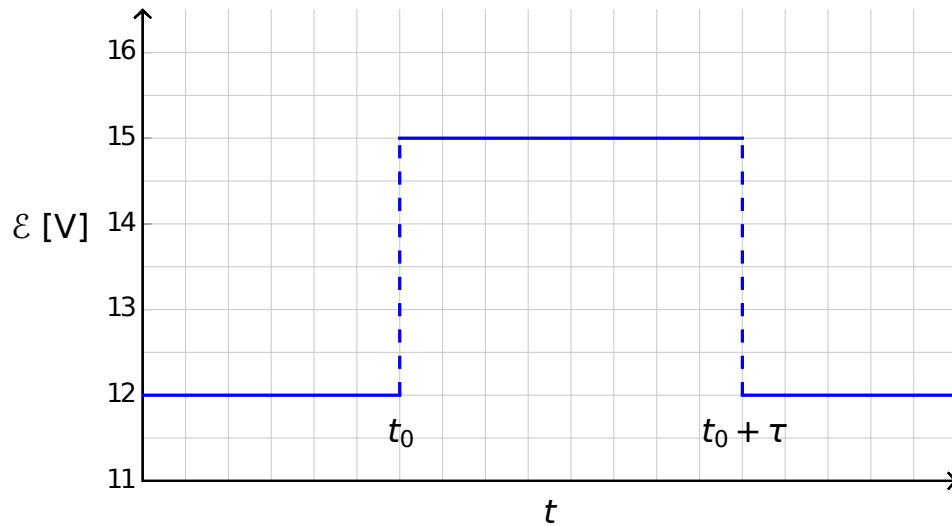


Abbildung 4: Spannung der Spannungsquelle als Funktion der Zeit.

- | | | |
|------------|--|-------|
| C.1 | Skizziere die Graphen der Zeitabhängigkeit des Stroms $I_X(t)$ durch den nichtlinearen Bauteil X für $\tau < \tau_{\text{crit}}$ und für $\tau > \tau_{\text{crit}}$. | 1.2pt |
| C.2 | Ermittle einen Ausdruck und den numerischen Wert für die kritische Zeit τ_{crit} , bei welchem sich das Verhalten des Systems ändert. | 0.6pt |
| C.3 | Stellt eine Schaltung mit $\tau = 1.00 \times 10^{-6}$ s einen Neuristor dar? | 0.2pt |